Prof. Matthias Beck
Hauke Sprink
Institut für Mathematik
AG Diskrete Geometrie
Arnimallee 2

Freie Universität Berlin

WAHRSCHEINLICHKEIT & STATISTIK
Wintersemester 2019/20

1. Übung

Aufgabe 1.1
Luca, Mika und Noa besuchen das Neue Museum und geben ihre Jacken in der Garderobe ab. Als sie das Museum später verlassen möchten, gibt es einen anderen Mitarbeiter an der Garderobe, der nicht weiß, wem die Jacken gehören. Daher gibt er die Jacken zufällig zurück, sodass jede Verteilung der Jacken die gleiche Wahrscheinlichkeit hat.
a. Beschreiben Sie den Wahrscheinlichkeitsraum. Was ist Ω? $\mathbb{P}$?
b. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass keiner seine eigene Jacke erhält.
c. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau eine Person ihre eigene Jacke erhält.

Aufgabe 1.2
Alexis und Chris haben genau zwei Kinder. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das ältere Kind ein Junge bzw. ein Mädchen ist, sei jeweils $\frac{1}{2}$. Ebenso sei die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das jüngere Kind ein Mädchen bzw. ein Junge ist, jeweils $\frac{1}{2}$.
a. Auf die Frage, ob das ältere Kind ein Mädchen sei, antwortet Alexis, dass es sich um ein Mädchen handele. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kinder weiblich sind?
b. Auf die Frage, ob beide Kinder Jungen seien, antwortet Chris mit nein. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kinder weiblich sind?
c. Auf die Frage, welches Geschlecht eines der beiden Kinder habe, schauen sich Alexis und Chris mit großen Augen an und antworten gleichzeitig, dass eines ein Mädchen sei. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kinder weiblich sind?

Aufgabe 1.3
Wir definieren $\binom{n}{k}$ als die Anzahl der k-elementigen Teilmengen von $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ und ergänzen diese Definition mit $\binom{0}{0} := 1$. Beweisen Sie:
a. $\displaystyle\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ für $n \geq 0$.
b. $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ für $1 \leq k \leq n-1$.
c. $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ für $0 \leq k \leq n$.[1]
d. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ für $n \geq 0$.

Aufgabe 1.4
Erinnern Sie sich, dass eine Menge Ω *abzählbar unendlich* ist, wenn es eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach Ω gibt. Eine Menge is *abzählbar*, wenn sie entweder endlich oder abzählbar unendlich ist, und eine Menge ist *überabzählbar*, wenn sie nicht abzählbar ist.

[1]Insbesondere ist der Bruch $\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ immer eine ganze Zahl.

a. Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen abzählbar unendlich sind:

  i. Die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen.

  ii. Die Menge $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

b. Zeigen Sie, dass die Menge Ω genau dann abzählbar ist, wenn es eine surjective Abbildung von $\mathbb{N}$ nach Ω gibt. Folgern Sie, dass die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen abzählbar ist.

c. Beweisen Sie, dass die Menge $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ aller Folgen mit Folgegliedern aus $\{0,1\}$ eine überabzählbare Menge ist. Folgern Sie, dass die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen überabzählbar ist.