Freie Universität Berlin

Prof. Matthias Beck
Hauke Sprink
Institut für Mathematik
AG Diskrete Geometrie
Arnimallee 2

Wahrscheinlichkeit & Statistik
Wintersemester 2019/20

7. Übung (Abgabe: 3.12., 8:30)

Aufgabe 7.1
Wir betrachten den endlichen Wahrscheinlichkeitkeitsraum $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ mit

$$\mathbb{P}(\omega_1) = \mathbb{P}(\omega_2) = \mathbb{P}(\omega_3) = \frac{1}{3}$$

sowie die Zufallsvariablen X, Y und Z mit

$$\begin{aligned} X(\omega_1) &:= 1, & X(\omega_2) &:= 2, & X(\omega_3) &:= 3; \\ Y(\omega_1) &:= 2, & Y(\omega_2) &:= 3, & Y(\omega_3) &:= 1; \\ Z(\omega_1) &:= 3, & Z(\omega_2) &:= 1, & Z(\omega_3) &:= 2. \end{aligned}$$

a. Zeigen Sie, dass die drei Zufallsvariablen die gleiche Wahrscheinlichkeitsverteilung besitzen.
b. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der drei neuen Zufallsvariablen $X+Y$, $X+Y-Z$ und $\sqrt{(X^2+Y^2)Z}$.

Aufgabe 7.2
Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, beim mehrmaligen Werfen einer fairen Münze erstmalig beim k-ten Wurf „Kopf" zu erhalten. Erstellen Sie eine Stabdiagramm für die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(X = k)$ für $1 \leq k \leq 10$.

Aufgabe 7.3
Wir betrachten ein Gerichtsurteil, bei dem das Urteil „schuldig" von 8 der 12 Geschworenen bestätigt werden muss, damit es gültig wird. Die Geschworenen treffen ihre Entscheidungen unabhängig voneinander und die Wahrscheinlichkeit, dass ein Geschworener das richtige Urteil trifft, ist für alle Geschworen gleich und beträgt ϑ. Wie groß ist die Warscheinlichkeit, dass das Gerichtsurteil der Wahrheit entspricht (als Funktion von ϑ)? Berechnen Sie den Wert dieser Wahrscheinlichkeit für $\vartheta = 80\%$.

Aufgabe 7.4
Bei der elektronischen Datenübertragung werden Nachrichten in einer Folge von Signalen mit Werten 0 oder 1 kodiert, eine Nachricht wird dabei als ein digitales Wort $\omega = (a_1, \ldots, a_n) \in \{0;1\}^n$ der Länge n aufgefasst. Bei der Übertragung der Nachricht $\omega = (a_1, \ldots, a_n)$ kann ein Fehler $\epsilon = (e_1, \ldots, e_n) \in \{0;1\}^n$ auftreten, dann wird das Wort $\omega' = (a'_1, \ldots, a'_n)$ empfangen. Wir einigen uns, dass $e_i = 0$ genau dann gilt, falls $a_i = a'_i$ und dass $e_i = 1$ genau dann gilt, falls $a_i \neq a'_i$. Wir nehmen an, dass Übertragungsfehler an verschiedenen Stellen im Wort unabhängig voneinander vorkommen. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler an der Stelle i vorkommt, beträgt p.

a. Die Zufallsvariable X zählt die bei der Datenübertragung auftretenden Fehler. Leiten Sie eine Formel für die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}_X(k)$ her.

b. Bestimmen Sie für $n = 16$, $p = 0{,}1$ und $0 \leq k \leq 5$ die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}_X(k)$ und erstellen Sie ein Stabdiagramm für diese Werte.

c. Es gilt weiterhin $n = 16$ und $p = 0{,}1$. Wie groß muss k gewählt werden, damit die Wahrscheinlichkeit für k oder mehr Übertragungsfehler höchstens 2% ist?