Freie Universität Berlin

Prof. Matthias Beck
Hauke Sprink
Institut für Mathematik
AG Diskrete Geometrie
Arnimallee 2

WAHRSCHEINLICHKEIT & STATISTIK
Wintersemester 2019/20

9. Übung (Abgabe: 17.12., 8:30)

Aufgabe 9.1
Skizzieren Sie (z.B. mit Hilfe eines Stabdiagramms) die

a. Binomialverteilung für $n = 1000$, $p = 2\%$
b. Binomialverteilung für $n = 50$, $p = 40\%$
c. Poissionverteilung für $\lambda = 20$

jeweils für $10 \le k \le 30$.[1]

Aufgabe 9.2
Eine Firma verkauft Batterien im 6er-Pack. Erfahrungsgemäß funktionieren bei

5% aller 6er-Packs	eine Batterie
1% aller 6er-Packs	zwei Batterien
0,01% aller 6er-Packs	drei Batterien
0,0001% aller 6er-Packs	mehr als drei Batterien

nicht. Vor einem Kauf testen wir 3 der 6 Batterien (zufällig) und kaufen den 6er-Pack nur, wenn alle drei funktionieren. Was ist die Wahrscheinlichkeit, daß wir einen zufällig ausgewählten 6er-Pack kaufen?

Aufgabe 9.3
Sie haben eine Firma, die Weihnachstbäume züchtet. Pro Baum machen Sie 15 Euro Nettogewinn; pro Baum, der am Schluß der Verkaufssaison noch unverkauft ist, machen Sie 5 Euro Verlust. Sie wollen gerne herausfinden, wie groß Ihr Lagerbestand sein sollte, um den durchschnittlichen Gesamtgewinn der Saison zu maximieren. Als erfahreneR MathematikerIn setzen Sie hierfür eine Zufallsvariable X an, die gleich der Anzahl Bäume ist, die Sie in der Saison verkaufen werden; X hat eine uns unbekannte Verteilung $\mathbb{P}_X$.

a. Bestimmen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariable $f_b(X) :=$ Gesamtgewinn bei einem Bestand von b Bäumen.[2]
b. Berechnen Sie die Differenz $\mathbb{E}(f_{b+1}(X)) - \mathbb{E}(f_b(X))$, vereinfachen Sie die Bedingung, daß diese Differenz positiv ist, und leiten Sie daraus ein Kriterium ab, für welches b der durchschnittliche Gesamtgewinn maximiert wird.

[1] Wenn Sie hierfür einen Computer verwenden (was ich Ihnen rate), reichen Sie bitte den Ausdruck Ihres Programmcodes mit ein.

[2] Dieser Erwartungswert hängt sowohl von b, als auch der Verteilung $\mathbb{P}_X$ ab.

Aufgabe 9.4

Diese Aufgabe gibt einen alternativen Weg zur Berechnung des Erwartungswert (und der Varianz) für die hypergeometrische Verteilung.

a. Zeigen Sie, daß für ganze Zahlen $0 \leq a, b \leq c$ gilt $\displaystyle\sum_{j=0}^{\min\{a,b\}} \binom{b}{j}\binom{c-b}{a-j} = \binom{c}{a}$.

b. Berechnen Sie den hypergeometrischen Erwartungswert

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{\min\{m,n\}} k \, \frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}},$$

indem Sie $k\binom{m}{k} = m\binom{m-1}{k-1}$ ausnutzen und danach die Summenvariable um 1 verschieben.

c. Wiederholen Sie diese Argumentation für

$$\sum_{k=2}^{\min\{m,n\}} k(k-1) \, \frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}},$$

und leiten Sie daraus die Varianz für die hypergeometrische Verteilung ab.