

11. Übung (Abgabe: 14.1.2020, 8:30)

Aufgabe 11.1

Die *Gamma-Funktion* wird durch

$$\Gamma : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

definiert.¹ (Sie können annehmen, daß das Integral konvergiert.)

- Zeigen Sie, daß $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$ gilt.
- Berechnen Sie $\Gamma(1)$ und beweisen Sie, daß $\Gamma(n) = (n-1)!$ für positive ganzen Zahlen n gilt.
- Man kann via **a.** die Gamma-Funktion auf den Definitionsbereich \mathbb{R} analytisch fortsetzen² und dann beweisen, daß für $x \notin \mathbb{Z}$

$$\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

gilt. Folgern Sie hieraus die Werte $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ und $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Aufgabe 11.2

Die Geschwindigkeit eines Moleküls in einem homogenen Gas im Gleichgewichtszustand ist eine Zufallsvariable, deren Dichtefunktion durch

$$f(x) = \begin{cases} a x^2 e^{-bx^2} & \text{falls } x \geq 0, \\ 0 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

gegeben ist, wobei b von der Molekülmasse und der Temperatur des Gases abhängt.³ Bestimmen Sie a in Abhängigkeit von b .

Aufgabe 11.3

Die Lebensdauer einer Elektronenröhre (gemessen in Stunden) ist eine Zufallsvariable mit der Dichtefunktion

$$f : [0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x e^{-x}.$$

¹Mit ein bisschen komplexer Analysis definiert man die Gamma-Funktion am besten für ein komplexes Argument, dessen reeller Anteil dann als positiv vorausgesetzt wird, damit das Integral konvergiert.

²Auch dies ist wieder im Komplexen einfacher: Man kann Γ auf ganz \mathbb{C} analytisch fortsetzen.

³Man berechnet $b = \frac{m}{2kT}$, wobei k die Boltzmann-Konstante, T die absolute Temperatur und m die Molekülmasse bezeichnen.

Berechnen Sie die Lebenserwartung dieser Elektronenröhre.

Aufgabe 11.4

Ein Bus pendelt zwischen den Städten A und B, die 100km voneinander entfernt liegen. Wir nehmen an, dass bei einem Busausfall die Entfernung vom Ort des Schadens zur Stadt A gleichmäßig über das Intervall $(0; 100)$ verteilt ist.

Zur Zeit gibt es drei Vertragswerkstätten: je eine in A und B sowie eine 50km von A entfernt. Bei der Neuausschreibung der Werkstattsverträge wird den Landrat empfohlen, dass je eine Werkstatt 25, 50 bzw. 75km entfernt von A entfernt sein sollten. Stimmen Sie zu? Warum?