Freie Universität Berlin

Prof. Matthias Beck
Hauke Sprink
Institut für Mathematik
AG Diskrete Geometrie
Arnimallee 2

WAHRSCHEINLICHKEIT & STATISTIK
Wintersemester 2019/20

**15. Übung** (Abgabe: 11.2.2020, 8:30)

**Aufgabe 15.1**
Es sei $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ eine Stichprobe eines Bernoulliexperiments mit Parameter $p$; insbesondere ist $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ binomialverteilt.

**a.** Zeigen Sie, daß $\overline{X} := \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$ eine erwartungstreue Schätzfunktion für $p$ ist.

**b.** Zeigen Sie, daß $V(\overline{X}) = \frac{p(1-p)}{n}$ ist.

**c.** Berechnen Sie $\mathbb{E}\left(\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}\right)$ und schließen Sie hieraus, daß $\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}$ nicht eine erwartungstreue Schätzfunktion für $V(\overline{X})$ ist.

**Aufgabe 15.2**
Wir betrachten eine geometrische Verteilung mit (unbekanntem) Parameter $p$. Berechnen Sie eine Maximum-likelihood Schätzfunktion für $p$, falls die Stichprobe $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ vorliegt. Interpretieren Sie Ihre Antwort.

**Aufgabe 15.3**
Angenommen, eine Zufallsvariable ist normalverteilt mit unbekanntem Erwartungswert $\mu$ und bekannter Varianz $\sigma^2$. Wir möchten ein Konfidenzinterval für $\mu$ finden zu einem vorgegebenen Fehlerniveau $a$.

**a.** Sei $a = 1\%$. Wie groß muß eine Stichprobe mindestens sein, daß das Konfidenzintervall eine vorgegebene Länge $l$ hat?

**b.** Welches Fehlerniveau $a$ sollten wir für eine gegebene Stichprobenanzahl $n$ und Konfidenzintervallänge $l$ ansetzen?

**Aufgabe 15.4**
Ihre Tante hat ein Käsegeschäft und verkauft u.a. 22-Pfund-Käselaibe. Sie hat gerade eine Lieferung bekommen und eine Stichprobe von 10 Laiben genommen, mit folgendem Ergebnis für die Gewichte (in Pfund):

$$21,50 \quad 18,95 \quad 18,55 \quad 22,35 \quad 22,90 \quad 22,20 \quad 19,40 \quad 23,10 \quad 22,84 \quad 23,34\,.$$

Unter der Annahme, daß die Gewichte normalverteilt sind, berechnen Sie ein 95%-Konfidenzintervall für den Erwartungswert.