Prof. Matthias Beck
Hauke Sprink
Institut für Mathematik
AG Diskrete Geometrie
Arnimallee 2

Freie Universität Berlin

WAHRSCHEINLICHKEIT & STATISTIK
Wintersemester 2019/20

1. Übung (Lösungen)

Aufgabe 1.1
Luca, Mika und Noa besuchen das Neue Museum und geben ihre Jacken in der Garderobe ab. Als sie das Museum später verlassen möchten, gibt es einen anderen Mitarbeiter an der Garderobe, der nicht weiß, wem die Jacken gehören. Daher gibt er die Jacken zufällig zurück, sodass jede Verteilung der Jacken die gleiche Wahrscheinlichkeit hat.

a. Beschreiben Sie den Wahrscheinlichkeitsraum. Was ist Ω? $\mathbb{P}$?
b. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass keiner seine eigene Jacke erhält.
c. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau eine Person ihre eigene Jacke erhält.

Lösung:
a. Ω ist die Menge der möglichen Jackenaufteilungen, d.h. die Menge der Permutationen von $[3]$. (Bsp.: Person 1 kriegt die Jacke von Person 2, Person 2 kriegt die Jacke von Person 3, Person 3 die von Person 1 korrespondiert zur Permutation $[231] \in \Omega$). Damit gibt es $3! = 6$ Elemente, und da jede Verteilung gleich wahrscheinlich ist, gilt $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{6}$ und $\mathbb{P}(E) = \frac{|E|}{6}$ für ein Ereignis $E \subseteq \Omega$.
b. $E_1 = \{[231], [312]\} \implies \mathbb{P}(E_1) = \frac{1}{3}$
c. $E_2 = \{[132], [321], [213]\} \implies \mathbb{P}(E_2) = \frac{1}{2}$

Aufgabe 1.2
Alexis und Chris haben genau zwei Kinder. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das ältere Kind ein Junge bzw. ein Mädchen ist, sei jeweils $\frac{1}{2}$. Ebenso sei die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das jüngere Kind ein Mädchen bzw. ein Junge ist, jeweils $\frac{1}{2}$.

a. Auf die Frage, ob das ältere Kind ein Mädchen sei, antwortet Alexis, dass es sich um ein Mädchen handele. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kinder weiblich sind?
b. Auf die Frage, ob beide Kinder Jungen seien, antwortet Chris mit nein. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kinder weiblich sind?
c. Auf die Frage, welches Geschlecht eines der beiden Kinder habe, schauen sich Alexis und Chris mit großen Augen an und antworten gleichzeitig, dass eines ein Mädchen sei. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kinder weiblich sind?

Lösung:
a. $\frac{1}{2}$
b, c. Ein Ereignis fällt jeweils weg, die anderen sind gleich wahrscheinlich $\to \frac{1}{3}$

Aufgabe 1.3
Wir definieren $\binom{n}{k}$ als die Anzahl der k-elementigen Teilmengen von $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ und ergänzen diese Definition mit $\binom{0}{0} := 1$. Beweisen Sie:

a. $$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \text{ für } n \geq 0.$$

Lösung: Die einzige Teilmenge mit 0 Elementen ist $\varnothing$ und die einzige Teilmenge mit n Elementen ist $[n]$.

b. $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ für $1 \le k \le n-1$.

Lösung: Die k-elementigen Teilmenge von $[n]$ lassen sich aufteilen in jene, die n enthalten und jene, die n nicht enthalten.[1] Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen ist gleich die Anzahl der k-elementigen Teilmengen *mit* n plus die Anzahl der k-elementigen Teilmengen *ohne* n. Enthält eine k-elementige Teilmenge nun n, müssen wir noch $k-1$ Elemente von $n-1$ wählen; enthält die Menge n nicht, müssen noch k Elemente aus $n-1$ gewählt werden, insgesamt also $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

c. $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ für $0 \le k \le n$.[2]

Lösung: Wir wollen wissen, wie viele verschiedene k-elementigen Teilmengen $[n]$ hat. Wählen wir also k Elemente und zählen, wie viele verschiedene Möglichkeiten es hierfür gibt. Für das erste Element stehen n Elemente zur Auswahl, für das zweite noch $(n-1)$, für das dritte noch $(n-2)$, usw., insgesamt also $n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$. Was wir bis jetzt nicht beachtet haben, ist, dass für Mengen die Reihenfolge der enthaltenen Elemente egal ist. Wurden also k Elemente ausgewählt, muss noch durch $k!$ geteilt werden, da dies genau die Anzahl der möglichen Permutation der gewählten Elemente ist, sprich der verschiedenen Reihenfolgen in denen die Elemente ausgewählt wurden.

Alternativlösung: Für $k = 0$ und $k = n$ folgt die Behauptung aus **a.** Wir beweisen das Statement *für* $1 \le k \le n-1$ *gilt* $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ per Induktion über n.

Induktionsanfant: Für $n = 2$ kann k nur 1 sein, wofür $\binom{n}{k} = 2$ ist.

Induktionsschritt: $\binom{n+1}{k} \overset{\text{b.}}{=} \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \overset{\text{IV}}{=} \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{k\cdot n!}{k!(n-k+1)!} + \frac{n!\cdot(n-k+1)}{k!(n-k+1)!} = \frac{n!\cdot(k+n-k+1)}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}$ $\square$

d. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ für $n \ge 0$.

Lösung: Das kann auch durch Induktion über n bewiesen werden, oder über die Tatsache, daß der Summand $\binom{n}{k}$ auf der linken Seite die Anzahl der k-Teilmengen einer n-Menge darstellt; nachdem wir links über alle möglichen k summieren, ergibt das auf der rechten Seite die Gesamtanzahl aller Teilmengen einer n-Menge, und wir wissen aus der Vorlesung, daß es davon 2^n gibt. $\square$

Aufgabe 1.4

Erinnern Sie sich, dass eine Menge Ω *abzählbar unendlich* ist, wenn es eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach Ω gibt. Eine Menge is *abzählbar*, wenn sie entweder endlich oder abzählbar unendlich ist, und eine Menge ist *überabzählbar*, wenn sie nicht abzählbar ist.

---

[1] Die Zahl n ist hier beliebig. Die Idee ist, sich ein festes Element rauszusuchen, über das man alle Teilmengen charakterisieren kann.

[2] Insbesondere ist der Bruch $\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ immer eine ganze Zahl.

a. Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen abzählbar unendlich sind:

i. Die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen.

ii. Die Menge $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Lösung:

i. Wir definieren die Funktionen

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \quad f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{falls } n \text{ gerade}, \\ -\frac{n+1}{2} & \text{falls } n \text{ ungerade}, \end{cases}$$

$$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, \quad g(z) = \begin{cases} 2z & \text{falls } z \geq 0, \\ -2z - 1 & \text{falls } z < 0. \end{cases}$$

Dann gilt $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ und $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$, d.h., f ist eine Bijektion.

ii. Mittels Cantors (erstem) Diagonalargument konstruiert man eine Abzählung φ für $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und ersetzt diese durch ψ, wobei $\psi(0) = 0, \psi(2n) = \varphi(n)$ und $\psi(2n-1) = -\varphi(n)$ mit $n \in \mathbb{N}$. Man kann auch $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ direkt mittels einer spiralartigen Konstruktion mit Start im Ursprung abzählen.

b. Zeigen Sie, dass die Menge Ω genau dann abzählbar ist, wenn es eine surjective Abbildung von $\mathbb{N}$ nach Ω gibt. Folgern Sie, dass die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen abzählbar ist.

Lösung:

" $\Rightarrow$ "

Sei Ω abzählbar.

Falls $|\Omega| < \infty$ nummeriert man die Elemente $\omega_1, \ldots, \omega_n$ und konstruiert durch $\varphi(i) = \omega_i$ für $1 \leq i \leq n$ und $\varphi(i) = \omega_1$ für $i \geq n+1$ eine surjektive Abbildung.

Falls $|\Omega| = \infty$ existiert eine bijektive und somit surjektive Abbildung.

" $\Leftarrow$ "

Sei $\varphi : \mathbb{N} \to \Omega$ surjektiv. Setzte $\psi(1) = \varphi(1)$ und $\psi(n) = \varphi(\min\{j \geq n \mid \varphi(j) \neq \psi(i), i = 1, \ldots n-1\})$ für $n \geq 2$. Falls das Minimum für ein n nicht exisitert bedeutet das, dass Ω endlich und damit abzählbar ist. Falls für jedes n so ein Minimum exisitert, ist ψ eine bijektive Abbildung und Ω abzählbar. $\square$

Von **a.** wissen wir, daß es eine Bijektion $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ gibt. Die Funktion $\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q}$ mit $\varphi(p, q) = \frac{p}{q}$ ist surjektiv. Also ist $\varphi \circ \psi$ surjektiv und somit $\mathbb{Q}$ abzählbar.

c. Beweisen Sie, dass die Menge $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ aller Folgen mit Folgegliedern aus $\{0, 1\}$ eine überabzählbare Menge ist. Folgern Sie, dass die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen überabzählbar ist.

Lösung: Es sei Ω die Menge der Zahlen in $\mathbb{R}$, deren Dezimalzahlentwicklung nur Nullen und Einsen enthält. Angenommen es existiert eine Abzählung $\varphi : \mathbb{N} \to \Omega$. Dann kann man durch $\omega_i = 1 - \varphi(i)_i$ ein Element $\omega \in \Omega$ konstruieren, das nicht in der Abzählung vorkommt und somit die Annahme zum Widerspruch führen($\to$ Cantors zweites Diagonalargument). Die Elemente aus $\mathbb{R}$ enthält also eine überabzählbare Teilmenge und ist (mit **b.**) überabzählbar.