Freie Universität Berlin

Prof. Matthias Beck
Hauke Sprink
Institut für Mathematik
AG Diskrete Geometrie
Arnimallee 2

Wahrscheinlichkeit & Statistik
Wintersemester 2019/20

2. Übung (Lösungen)

Aufgabe 2.1
Zeigen Sie die folgenden Binomialidentitäten; alle vorkommenden Variablen sind natürliche Zahlen.

a. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n}$.

Lösung: Wir beweisen die Aussage *für alle* $k \in \mathbb{N}$ *haben wir* $\sum_{k=0}^{n} \binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n}$ per Induktion über n.
Induktionsanfang $n = 0$: $\binom{r}{0} = 1 = \binom{r+1}{0}$

Induktionsschritt: $\sum_{k=0}^{n+1} \binom{r+k}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{r+k}{k} + \binom{r+n+1}{n+1} \overset{\text{IV}}{=} \binom{r+n+1}{n} + \binom{r+n+1}{n+1} \overset{1.3\text{b}}{=} \binom{r+n+2}{n+1}$ □

b. Für $0 \le k \le m \le r$ gilt $\displaystyle\binom{r}{m}\binom{m}{k} = \binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k}$.

Lösung:

$$\binom{r}{m}\binom{m}{k} = \frac{r!}{m!\,(r-m)!} \cdot \frac{m!}{k!\,(m-k)!} = \frac{r!}{(r-m)!\,k!\,(m-k)!}$$

$$\binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k} = \frac{r!}{k!\,(r-k)!} \cdot \frac{(r-k)!}{(m-k)!\,(r-m)!} = \frac{r!}{(r-m)!\,k!\,(m-k)!}$$ □

Alternativlösung: Die Anzahl der Möglichkeiten, erst m Elemente aus einer Grundmenge mit r Elementen und aus diesen nochmal k zu wählen ist gleich der Anzahl der Möglichkeiten, direkt k aus r zu wählen und dann noch $m-k$ aus den übrigen $r-k$ Elementen. □

c. Für $1 \le k \le n$ gilt $\displaystyle\binom{n}{k} = \sum_{a=k}^{n} \binom{a-1}{k-1}$.

Lösung: Wir beweisen die Aussage *für alle* $1 \le k \le n$ *gilt* $\binom{n}{k} = \sum_{a=k}^{n} \binom{a-1}{k-1}$ per Induktion über n.
Induktionsanfang: $n = 1$ impliziert $k = 1$, und dann ist $\binom{1}{1} = 1 = \binom{0}{0}$
Induktionsschritt: Falls $k = n+1$ gilt die Aussage wegen $\binom{n+1}{n+1} = 1 = \binom{n}{n}$. Für $1 \le k \le n$ rechnen wir

$$\binom{n+1}{k} \overset{1.3\text{b}}{=} \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \overset{\text{IV}}{=} \sum_{a=k}^{n} \binom{a-1}{k-1} + \binom{n-1+1}{k-1} = \sum_{a=k}^{n+1} \binom{a-1}{k-1}. \quad \square$$

Alternativlösung: Will man wissen, wie viele verschiedene k-elementige Teilmengen $[n]$

hat, kann man diese wieder ähnlich wie in 1.3b aufteilen. Enthält die Menge eine 1, gibt es noch $\binom{n-1}{k-1}$ für die anderen Elemente. Enthält die Menge keine 1, kann man weiter bzgl. der 2 aufteilen:
Enthält die Menge eine 2 (also ohne 1 aber mit 2), müssen noch $k-1$ Elemten gewählt werden, es stehen aber nur noch $n-2$ zur Verfügung, d.h. es gibt $\binom{n-2}{k-1}$ Möglichkeiten. Enthält die Menge weder eine 1 noch eine 2, kann man bzgl. 3 aufteilen usw., bis nur noch $k-1$ Elemente übrig sind und es genau $\binom{k-1}{k-1} = 1$ Möglichkeit gibt. $\square$

Aufgabe 2.2
Ein einsamer Kartenspieler gibt sich selber fünf Karten aus einem Kartenspiel für Poker.

a. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er sich ein *straight flush* (fünf direkt aufeinanderfolgende Karten oder Ass-2-3-4-5 gleicher Farbe) gegeben?
Lösung: Es gibt insgesamt 52 verschiedene Karten und Ω sollte alle Möglichkeiten, sich 5 davon zu geben, enthalten. Eine mögliche Wahl ist also $\Omega = \{A \subset [13] \times [4] : |A| = 5\}$, nachdem wir 13 verschiedenen Kartenwerte und 4 Farben haben. Jedes Blatt ist gleich wahrscheinlich, d.h. $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$ für alle $\omega \in \Omega$ mit $|\Omega| = \binom{52}{5}$. Bleibt also noch die Anzahl der gültigen Möglichkeiten zu berechnen. Es gibt pro Farbe 10 (mit Royal Flush) verschiedene Straßen und 4 Farben, insgesamt also 40 Möglichkeiten. Das ergibt $\frac{40}{\binom{52}{5}}$.

b. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er sich eine *Straße* (fünf direkt aufeinanderfolgende Karten oder Ass-2-3-4-5 mit mindestens zwei verschiedenen Farben) gegeben?
Lösung: Analog zu **a.** berechnet man hier die Anzahl der gültigen Möglichkeiten. Dazu überlegt man sich erst, wie viele Straßen es insgesamt gibt und zieht anschließend jene aus **a.** wieder ab. Es gibt 10 verschiedene Startwerte für eine Straße und für jede Karte in dieser Straße 4 Farbmöglichkeiten, also insgesamt $\frac{4^5 \cdot 10 - 40}{\binom{52}{5}}$.

Aufgabe 2.3
Betrachten Sie das Wort RHABARBERBARBARA.

a. Wie viele verschiedene Wörter können aus (allen) diesen Buchstaben gebildet werden?
Lösung: $\binom{16}{5}\binom{11}{5}\binom{6}{4}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = \binom{16}{5,5,4,1,1}$

b. Was passiert, wenn wir nur 15 der 16 Buchstaben benutzen?
Lösung: $\binom{15}{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5}$, wobei genau ein k_i aus **a.** um 1 verringert wird, je nachdem welcher Buchstabe weggelassen wird.

Aufgabe 2.4
Meine sehr unordentliche Schublade enthält viele Socken: zwölf weiße, zehn graue und sechs blaue Socken.

a. Wie viele Möglichkeiten gibt es, ein gleichfarbiges Paar Socken zu bilden?
Lösung:
$$\# \text{ Paare} = \# \text{ weiße Paare} + \# \text{ graue Paare} + \# \text{ blaue Paare} = \binom{12}{2} + \binom{10}{2} + \binom{6}{2}$$

b. Die Lampe meines Raums ist kaputt und ich habe mich heute früh im Dunkeln angezogen. Dabei habe ich drei Socken aus meiner Schublade zufällig genommen. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese drei Socken ein gleichfarbiges Paar Socken enthalten?

Lösung:

Wegen $\mathbb{P}(\text{mindestens ein Paar}) = 1 - \mathbb{P}(\text{kein Paar})$ berechnet man die Anzahl der ungünstigen Möglichkeiten, d.h. die Anzahl der Fälle, in denen man drei verschiedene Socken nimmt: $\binom{12}{1} \cdot \binom{10}{1} \cdot \binom{6}{1}$. Da jedes Ereignis gleich wahrscheinlich ist, muss man durch die Gesamtanzahl der Möglichkeiten teilen, um $\mathbb{P}(\text{kein Paar}) = \frac{\binom{12}{1} \cdot \binom{10}{1} \cdot \binom{6}{1}}{\binom{28}{3}}$ und damit $\mathbb{P}(\text{mindestens ein Paar}) \approx 0.78$ zu errechnen.