Freie Universität Berlin

WAHRSCHEINLICHKEIT & STATISTIK
Wintersemester 2019/20

Prof. Matthias Beck
Hauke Sprink
Institut für Mathematik
AG Diskrete Geometrie
Arnimallee 2

3. Übung (Lösungen)

Aufgabe 3.1
Leiten Sie einen geschlossenen Ausdruck für $\sum_{k=0}^{m} \frac{\binom{m}{k}}{\binom{n}{k}}$ her, wobei $m \le n$ natürliche Zahlen sind. (*Tip:* Interpretieren Sie $\frac{\binom{m}{k}}{\binom{n}{k}}$ *nicht* als Wahrscheinlichkeiten.)

Lösung:

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{\binom{m}{k}}{\binom{n}{k}} = \sum_{k=0}^{m} \frac{m!\,(n-k)!\,k!}{n!\,(m-k)!\,k!} = \frac{m!}{n!} \sum_{k=0}^{m} \frac{(n-k)!}{(m-k)!} = \frac{m!\,(n-m)!}{n!} \sum_{k=0}^{m} \binom{n-k}{m-k}.$$

Die Summe auf der rechten Seite kann z.B. mit Aufgabe **2.1a** (mit $r = n - m$) berechnet werden:

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{n-k}{m-k} = \sum_{k=0}^{m} \binom{n-m+k}{k} = \binom{n+1}{m}.$$

Damit bekommen wir

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{\binom{m}{k}}{\binom{n}{k}} = \frac{m!\,(n-m)!}{n!} \binom{n+1}{m} = \frac{(n-m)!\,(n+1)!}{n!\,(n+1-m)!} = \frac{n+1}{n-m+1}.$$

□

Aufgabe 3.2
Wie viele natürliche Zahlen ≤ 1000 sind weder durch 5, 6 oder 8 teilbar?
Lösung:
$A := \{n \in [1000] : 5 \mid n\},\ |A| = \frac{1000}{5} = 200$
$B := \{n \in [1000] : 6 \mid n\},\ |B| = \lfloor \frac{1000}{6} \rfloor = 166$
$C := \{n \in [1000] : 8 \mid n\},\ |C| = \frac{1000}{8} = 125$
$A \cap B = \{n \in [1000] : 5 \mid n \text{ und } 6 \mid n\},\ |A \cap B| = \left\lfloor \frac{1000}{\mathrm{kgV}(5,6)} \right\rfloor = 33$
$A \cap C = \{n \in [1000] : 5 \mid n \text{ und } 8 \mid n\},\ |A \cap C| = \left\lfloor \frac{1000}{\mathrm{kgV}(5,8)} \right\rfloor = 25$
$B \cap C = \{n \in [1000] : 6 \mid n \text{ und } 8 \mid n\},\ |B \cap C| = \left\lfloor \frac{1000}{\mathrm{kgV}(6,8)} \right\rfloor = 41$
$A \cap B \cap C = \{n \in [1000] : 5 \mid n \text{ und } 6 \mid n \text{ und } 8 \mid n\},\ |A \cap B \cap C| = \left\lfloor \frac{1000}{\mathrm{kgV}(5,6,8)} \right\rfloor = 8$
Wir interessieren uns für $\{n \in [1000] : 5 \mid n \text{ oder } 6 \mid n \text{ oder } 8 \mid n\} = A \cup B \cup C$. Nach dem Inklusions-Exklusionsprinzip gilt

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 400.$$

Damit ist die Anzahl aller natürlichen Zahlen ≤ 1000, die weder durch 5,6 oder 8 teilbar sind, gleich $1000 - 400 = 600$. □

Aufgabe 3.3
Sei n eine natürliche Zahl. Wie viele Teilmengen von $[n]$ enthalten ein gerade Anzahl von Elementen? Wie viele Teilmengen von $[n]$ enthalten ein ungerade Anzahl von Elementen? (Können Sie einen Beweis mit Hilfe einer Bijektion angeben?)

Lösung: Sei G die Menge aller Teilmengen von $[n]$ mit einer geraden Anzahl von Elementen und U die Menge aller Teilmengen von $[n]$ mit einer ungeraden Anzahl von Elementen. Wir konstruieren eine Bijektion $\varphi : G \to U$, womit $|G| = |U| = 2^{n-1}$ (nach Aufgabe **1.3d**).

Unsere Bijektion ist $\varphi : G \to U$ gegeben durch

$$\varphi(A) := \begin{cases} A \cup \{1\} & \text{falls } 1 \notin A, \\ A \setminus \{1\} & \text{falls } 1 \in A. \end{cases}$$

Die Umkehrabbildung $\varphi^{-1} : U \to G$ ist durch dieselbe Regel gegeben. $\square$

Aufgabe 3.4
Wir wählen ein Anagramm von WISSENSCHAFTLERIN zufällig aus, wobei alle Anagramme dieselbe Wahrscheinlichkeit haben.

a. Wie groß ist groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in dem Anagramm ein “S” an vierter Stelle und ein “E” an vierzehnter Stelle steht?
b. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in dem Anagramm die drei “S” direkt aufeinander folgen und auch die beiden “E” direkt aufeinander folgen?

Lösung:

a. Es gibt insgesamt $\binom{17}{3,2,2,2,1,1,1,1,1,1,1,1}$ Anagramme. Wenn jetzt zwei Buchstaben eine vorgegebene Position haben sollen, bleiben noch 15 Positionen für die restlichen Buchstaben übrig, d.h. es gibt $\binom{15}{2,2,2,1,1,1,1,1,1,1,1,1}$ Möglichkeiten. Die Wahrschrscheinlichkeit ist also $\frac{\binom{15}{2,2,2,1,1,1,1,1,1,1,1,1}}{\binom{17}{3,2,2,2,1,1,1,1,1,1,1,1}} = \frac{15!\,3!}{17!} = \frac{3!}{17\cdot 16} = \frac{3}{136}$.
b. Da in jeder günstigen Möglichkeit sowohl “SSS” als auch “EE” vorkommen muss, kann man sich diese Buchstabenfolgen als jeweils einen einzelnen Buchstaben vorstellen. Die Wahrscheinlichkeit ist $\frac{\binom{14}{2,2,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1}}{\binom{17}{3,2,2,2,1,1,1,1,1,1,1,1}} = \frac{14!\,3!\,2!}{17!} = \frac{1}{340}$.