Freie Universität Berlin

Prof. Matthias Beck
Hauke Sprink
Institut für Mathematik
AG Diskrete Geometrie
Arnimallee 2

Wahrscheinlichkeit & Statistik
Wintersemester 2019/20

4. Übung (Lösungen)

Aufgabe 4.1
Wie viele Permutationen der Buchstaben

$$M,\ A,\ T,\ H,\ I,\ S,\ F,\ U,\ N$$

gibt es, in denen die Buchtstabenfolge MATH oder IS oder FUN nicht vorkommen? Die Permutationen MATHISFUN, INUMATHSF und ISMATHFUN sind Beispiele verbotener Permutationen.
Lösung:
$\Omega :=$ {alle Permutationen von MATHISFUN}
$A :=$ {Permutationen, in denen MATH vorkommt}
$B :=$ {Permutationen, in denen IS vorkommt}
$C :=$ {Permutationen, in denen FUN vorkommt}
$E :=$ {Permutationen, in denen MATH oder IS oder FUN vorkommt} $= A \cup B \cup C$
Gesucht ist $|\overline{E}| = |\Omega| - |E| = 9! - |A \cup B \cup C|$. Nach dem Inklusions–Exklusionsprinzip gilt $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 6! + 8! + 7! - 5! - 4! - 6! + 3!$ wobei man $|A|, |B|, |A \cap B|, \ldots$ ähnlich zu Aufgabe **3.4** berechnet. Insgesamt ergibt das $|\overline{E}| = 317658$ Permutationen, in denen keine der drei Buchstabenfolgen vorkommt.

Aufgabe 4.2
Gegeben seien ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$, sowie drei Ereignisse $A, B, C \subseteq \Omega$ mit $A \cap B = \varnothing$. Weiterhin seien die folgenden Wahrscheinlichkeiten gegeben:

$$\mathbb{P}(A) = 0{,}3; \qquad \mathbb{P}(B) = 0{,}2; \qquad \mathbb{P}(C) = 0{,}4 \qquad \text{und} \qquad \mathbb{P}(A \cap C) = 0{,}1.$$

Bestimmen Sie $\mathbb{P}(A \cup B)$, $\mathbb{P}(A \cup C)$, $\mathbb{P}(A \setminus B)$, $\mathbb{P}(C \setminus A)$, $\mathbb{P}(\overline{A} \cup \overline{B})$ und $\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B})$.
Lösung:
$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 0{,}5$
$\mathbb{P}(A \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0{,}6$
$\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) = 0{,}3$
$\mathbb{P}(C \setminus A) = \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap C) = 0{,}3$
$\mathbb{P}(\overline{A} \cup \overline{B}) = \mathbb{P}(\overline{A \cap B}) = 1 - \mathbb{P}(A \cap B) = 1$
$\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(\overline{A \cup B}) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B) = 0{,}5$

Aufgabe 4.3
Es seien $\Omega = [10]$ und die Abbildung $\mathbb{P}_c : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\mathbb{P}_c(k) = \frac{c}{2^k}$ für $c \in \mathbb{R}$.

a. Bestimmen Sie die Konstante $c \in \mathbb{R}$, so dass $(\Omega, \mathbb{P}_c)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum ist.
b. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit das Ereignis G „gerade Zahl“ und für das Ereignis U „ungerade Zahl“.

Lösung:

a. Damit $(\Omega, \mathbb{P}_c)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum ist, muss für c gelten, dass

$$1 = \mathbb{P}_c(\Omega) = \sum_{k=1}^{10} \frac{c}{2^k} = c \cdot \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^k = c \cdot \left(\frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{11}}{1 - \frac{1}{2}} \right) = c \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right) \iff c = \frac{1024}{1023}$$

b. $G = \{2, 4, 6, 8, 10\} \longrightarrow g \in G$ lässt sich schreiben als $g = 2k$ mit $k \in [5]$.

$$\mathbb{P}(G) = \sum_{g \in G} \mathbb{P}(g) = \sum_{k=1}^{5} \mathbb{P}(2k) = \sum_{k=1}^{5} \frac{c}{2^{(2k)}} = \frac{1024}{1023} \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{4^k} = \frac{1024}{1023} \left(\frac{\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)^6}{1 - \frac{1}{4}} \right) = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}(U) = 1 - \mathbb{P}(G) = \frac{2}{3}$$

Aufgabe 4.4

Nehmen wir mal der Einfachkeit halber an, daß jedes Jahr 365 Tage hat[1] und daß jeder Geburtstag die gleiche Wahrscheinlichkeit hat.[2]

a. Bestimmen sie die Wahrscheinlichkeit, daß es unter n zufällig ausgewählte Leuten mindestens zwei mit demselben Geburtstag gibt.

b. Wie groß muß n mindestens sein, daß diese Wahrscheinlichkeit größer als 50% ist?

c. Bestimmen sie die Wahrscheinlichkeit, daß es unter n zufällig ausgewählte Leuten mindestens drei mit demselben Geburtstag gibt. (*Tip:* Berechnen Sie erst die Wahrscheinlichkeiten, daß es genau ein "Geburtstagspaar" gibt, dann zwei "Geburtstagspaare", etc.)[3]

Lösung:

a. Sei E_n das Ereignis, dass unter n zufällig ausgewählten Leuten mindestens zwei denselben Geburtstag haben. Dann ist $\overline{E}_n$ das Ereignis, dass alle n Personen unterschiedliche Geburtstage haben. Damit $\overline{E}_n$ eintritt, ist der Geburtstag der ersten Person egal, die zweite darf aber nicht am selben Tag sein wie die erste, muss also an einem der verbliebenen 364 Tagen Geburtstag haben. Für die dritte Person fallen die Geburtstage der ersten beiden Leute weg, bleiben also noch 363 Möglichkeiten usw., bis Person n, die an einem der verbliebenen $365 - n + 1$ Tage Geburtstag haben muss. Es gibt somit $365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1) =: (365)_n$ günstige Möglichkeiten. Nach Voraussetzung ist jeder Geburtstag gleich wahrscheinlich, d.h. es gibt 365^n Möglichkeiten für die Verteilung der n Geburtstage. Das ergibt für die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(E_n) = 1 - \mathbb{P}(\overline{E}_n) = 1 - \frac{(365)_n}{365^n}$.

b. $n = 23$, da $\mathbb{P}(E_{22}) \approx 0,48 < 0,5 < 0,51 \approx P(E_{23})$.

c. Das Gegenereignis zu $E :=$"mindestens drei Leute mit demselben Geburtstag" ist $\overline{E} =$"alle haben unterschiedliche Geburtstage (A_0) oder es gibt genau ein Geburtstagspaar (A_1) oder genau zwei Geburtstagspaare(A_2), ... oder es gibt genau $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ Geburtstagspaare($A_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$)". Da die einzelnen Ereignisse in $\overline{E}$ disjunkt sind, ergibt sich $\mathbb{P}(\overline{E})$ als die Summe der einzelnen Wahrscheinlichkeiten.

$\mathbb{P}(A_0)$ haben wir in **a.** berechnet. Wenn es genau ein Geburtstagspaar geben soll, gibt es $\binom{n}{2}$ verschiedene Paare, die am selben Tag, für den es 365 Möglichkeiten gibt, Geburtstag haben können. Für die restlichen $n-2$ Personen gibt es dann noch $(364)_{n-2}$ Möglichkeiten.

[1] Ich weiß, das stimmt nicht.

[2] Das stimmt auch nicht, der Grund ist aber ein bischen weniger trivial, als bei der ersten Fußnote.

[3] Extra credit Aufgabe, wenn Sie ein bischen programmieren können: Wie groß muß n mindestens sein, daß diese Wahrscheinlichkeit größer als 50% ist?

Das ergibt $\mathbb{P}(A_1) = \frac{\binom{n}{2}\cdot 365\cdot(364)_{n-2}}{365^n}$. Es gibt $\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}$ Möglichkeiten, zwei Paare zu bilden. Für diese gibt es dann $\binom{365}{2}$ Möglichkeiten, an denen sie Geburtstag haben können. Die restlichen $n-4$ Personen müssen alle an unterschiedlichen von den verbliebenden 363 Tagen Geburtstag haben. D.h. es gibt noch $(363)_{n-4}$ Möglichkeiten. Insgesamt haben wir also

$$\mathbb{P}(A_2) = \frac{\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\binom{365}{2}(363)_{n-4}}{365^n}\,.$$

Allgemein gilt für $k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

$$\mathbb{P}(A_k) = \frac{\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\dots\binom{n-2k+2}{2}\binom{365}{k}(365-k)_{n-2k}}{365^n} = \frac{n!\binom{365}{k}(365-k)_{n-2k}}{(n-2k)!\,2^k\,365^n}$$

und damit $\mathbb{P}(\overline{E}) = 1 - \dfrac{(365)_n}{365^n} - \displaystyle\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n!\binom{365}{k}(365-k)_{n-2k}}{(n-2k)!\,2^k\,365^n}\,.$