Prof. Matthias Beck
Hauke Sprink
Institut für Mathematik
AG Diskrete Geometrie
Arnimallee 2

Wahrscheinlichkeit & Statistik
Wintersemester 2019/20

5. Übung (Lösungen)

Aufgabe 5.1

Angenommen, bei einem Wurf mit n fairen und unterscheidbaren Würfeln wurden n verschiedene Zahlen geworfen.

a. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei $n = 3$, dass mindestens eine sechs geworfen wurde?
b. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei $n = 3$, dass genau eine gerade Zahl war?
c. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei $n = 4$, dass als Summe eine zehn geworfen wurde?

Lösung: Sei jeweils $\Omega = [6]^n$ und $F_n \subset \Omega$ das Ereignis "Es wurden n verschiedene Zahlen geworfen". Es gilt $|F_n| = 6 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (6-n+1)$, weil es für den ersten Würfel sechs Möglichkeiten gibt, für den zweiten nur noch fünf, usw. Da die Würfel fair sind, ist $(\Omega, \mathbb{P})$ ein Laplace-Raum mit $\mathbb{P}(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}$ für ein Ereignis $E \subseteq \Omega$.

a. $E :=$ "Es wurde mindestens eine sechs geworfen", $\overline{E} =$ "Es wurde keine sechs geworfen".
$\mathbb{P}(E|F_3) = 1 - \mathbb{P}(\overline{E}|F_3) = 1 - \frac{\mathbb{P}(F_3 \cap \overline{E})}{\mathbb{P}(F_3)} = 1 - \frac{|F_3 \cap \overline{E}|}{|F_3|} = 1 - \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{2}$
Zur Berechnung von $|F_3 \cap E|$: Es wird keine sechs gewürfelt, also gibt es fünf Möglichkeiten für den ersten Würfel. Für den zweiten gibt es vier und den dritten drei, weil alle unterschiendliche Zahlen zeigen müssen.

b. $E :=$ "Es wurde genau eine gerade Zahl geworfen"
$\mathbb{P}(E|F_3) = \frac{\mathbb{P}(F_3 \cap E)}{\mathbb{P}(F_3)} = \frac{|F_3 \cap E|}{|F_3|} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{9}{20}$
Zur Berechnung von $|F_3 \cap E|$: Es gibt drei Möglichkeiten für die gerade Zahl und drei Positionen an denen sie geworfen werden kann. Für die erste ungerade Zahl gibt es auch 3 Möglichkeiten, für die zweite ungerade Zahl gibt es nur noch 2, da wieder alle drei Zahlen unterschiedlich sind.

c. $E :=$ "Die Summe ist gleich 10"
$\mathbb{P}(E|F_4) = \frac{\mathbb{P}(E \cap F_4)}{\mathbb{P}(F_4)} = \frac{|E \cap F_4|}{|F_4|} = \frac{4!}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{1}{15}$
Zur Berechnung von $|F_4 \cap E|$: Die einzige Möglichkeit mit vier unterschiedlichen Zahlen als Summe zehn zu würfeln, ist 1+2+3+4. Es gibt für den ersten Würfel also vier Möglichkeiten, für den zweiten Würfel gibt es drei, den dritten zwei und den vierten eine.

Aufgabe 5.2

Als eine Familie nach dem Picknick im Park bei den Fahrradstellplätzen angekommen ist, vermisst sie ihren Hund. Es gibt drei Möglichkeiten, wo der Hund sich befindet:

(A) Er ist schon nach Hause gegangen, um die Katze zu ärgern.
(B) Er sucht den einen besonders großen Knochen im Park.
(C) Er sucht Abwechslung und streunert im nahegelegenen Wald herum.

Die Wahrscheinlichkeiten dieser drei Möglichkleiten (basierend auf Erfahrungswerten früherer Picknicks) sind jeweils 25% für (A) und (C) sowie 50% für (B). Jeweils ein Kind wird zum Park und zum Waldrand geschickt, um nach dem Hund zu schauen. Im Park findet das suchende Kind ihn zu 90%, im Wald hingegen nur zu 50%.

a. Ein Kind hat den Hund gefunden. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Hund im Wald war.
b. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Hund (vorübergehend) vermisst gemeldet werden muss.

Lösung: Sei F das Ereignis, dass der Hund gefunden wurde. Aus dem Satz über die totale Wahrscheinlichkeit folgt, dass

$$\mathbb{P}(F) \;=\; \mathbb{P}(F|A)\,\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(F|B)\,\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(F|C)\,\mathbb{P}(C) \;=\; (1 \cdot \tfrac{1}{4} + \tfrac{9}{10} \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{4}) \;=\; \tfrac{33}{40}\,,$$

wobei $\mathbb{P}(F|A) = 1$ aus der Annahme folgt, dass der Hund, falls er schon nach Hause gegangen ist, immer gefunden wird. Damit berechnen wir:

a. $\mathbb{P}(C|F) = \frac{\mathbb{P}(F|C)\,\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(F)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{33}{40}} = \frac{5}{33}$
b. $\mathbb{P}(\overline{F}) = 1 - \mathbb{P}(F) = 1 - \frac{33}{40} = \frac{7}{40}$

Aufgabe 5.3

Bei einer Umfrage zum Thema Autowartung und Motorschäden wurden Fahrzeugbesitzer befragt, ob sie ihr Auto regelmäßig warten lassen und ob ihr Wagen in den ersten fünf Jahren nach Kauf eines Neuwagens einen Motorschaden hatte. Als Ergebnis der Befragung ergeben sich die folgenden Werte: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Motorschaden auftritt liegt bei den Fahrern, die ihr Fahrzeug regelmäßig warten lassen bei 10%. Bei Fahrern, die es nicht regelmäßig warten lassen, liegt sie bei 60%. Insgesamt lassen 70% der Fahrer ihr Fahrzeug regelmäßig warten. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fahrzeug mit Motorschaden regelmäßig gewartet wurde.

Lösung:
$M :=$ "Es liegt ein Mototschaden vor", $W :=$ "Das Auto wurde regelmäßig gewartet".
Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(W|M)$, dass, gegeben ein Auto hat einen Motorschaden, dieses regelmäßig gewartet wurde. Nach dem Satz von Bayes ist das das Gleiche wie $\frac{\mathbb{P}(M|W)\,\mathbb{P}(W)}{\mathbb{P}(M)}$. $\mathbb{P}(M)$ berechnen wir wieder mit dem Satz über die totalen Wahrscheinlichkeit:

$$\mathbb{P}(M) \;=\; \mathbb{P}(M|W)\,\mathbb{P}(W) + \mathbb{P}(M|\overline{W})\,\mathbb{P}(\overline{W}) \;=\; 0,1 \cdot 0,7 + 0,6 \cdot 0,3 \;=\; 0,25$$

und damit ist

$$\mathbb{P}(W|M) \;=\; \frac{\mathbb{P}(M|W)\,\mathbb{P}(W)}{\mathbb{P}(M)} \;=\; \frac{0,1 \cdot 0,7}{0,25} \;=\; 0,28\,.$$

Aufgabe 5.4

Analysieren Sie die folgende Variation einer bekannten Knobelaufgabe ($n = 3$) mit Hilfe von bedingten Wahrscheinlichkeiten. Wählen Sie als Kandidatin einer Spielshow die richtige von n Türen, so gewinnen Sie einen Koffer voller Geld, während sich hinter allen anderen Türen nichts als heiße Luft befindet. Nachdem Sie eine Tür gewählt haben, wählt der Showmaster unter den verbleibenden $n-1$ Türen $n-2$ aus, hinter denen sich heiße Luft verbirgt. Danach bietet er Ihnen an, die Tür zu wechseln. Nehmen Sie an oder lehnen Sie ab?

Lösung: O.B.d.A haben wir Tür 1 gewählt und der Showmaster hat die Türen 2 bis $n-1$ geöffnet. Wir definieren die Ereignisse
$G_k :=$ "Der Gewinn ist hinter Tür k" und
$T :=$ "Der Showmaster öffnet die Türen 2 bis $n-1$".
Wir wollen $\mathbb{P}(G_n|T)$ berechnen. Nach dem Satz von Bayes (und totaler Wahrscheinlichkeit) gilt

$$\mathbb{P}(G_n|T) \;=\; \frac{\mathbb{P}(T|G_n)\,\mathbb{P}(G_n)}{\mathbb{P}(T)} \;=\; \frac{\mathbb{P}(T|G_n)\,\mathbb{P}(G_n)}{\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(T|G_k)\,\mathbb{P}(G_k)}\,.$$

Die Zutaten dieser Formel berechnen sich wie folgt:
$\mathbb{P}(T|G_n) = 1$ folgt daraus, dass der Showmaster $n-2$ Türen öffnen muss. Tür 1 kann er nicht öffnen, weil wir diese gewählt haben und T_n auch nicht, da sich dorf der Gewinn befindet. Es bleibt also genau eine Möglichkeit.
$\mathbb{P}(G_1) = \mathbb{P}(G_2) = \cdots = \mathbb{P}(G_n) = \frac{1}{n}$, da die Wahrscheinlichkeit, dass sich der Koffer hinter einer bestimmten Tür befindet, für alle Türen gleich ist.
$\mathbb{P}(T|G_1) = \frac{1}{n-1}$, weil der Showmaster wieder $n-2$ Türen öffnen muss, dieses Mal aber nur Tür 1 wegfällt. Von den verbliebenen $n-1$ Türen, sucht er sich nun genau eine zufällig aus.
$\mathbb{P}(T|G_k) = 0$ für $2 \leq k \leq n-1$, da er nur Türen öffnet, hinter denen sich kein Gewinn befindet.
Das Ganze ergibt somit

$$\mathbb{P}(G_n|T) \;=\; \frac{1\cdot(\frac{1}{n})}{(\frac{1}{n-1}+1)\cdot\frac{1}{n}} \;=\; \frac{n-1}{n}\,.$$

Wir sollten also die Tür wechseln.