Freie Universität Berlin

Prof. Matthias Beck
Hauke Sprink
Institut für Mathematik
AG Diskrete Geometrie
Arnimallee 2

Wahrscheinlichkeit & Statistik
Wintersemester 2019/20

6. Übung (Lösungen)

Aufgabe 6.1
Wir haben 3 Urnen mit jeweils 2 Kugeln: eine enthält 2 rote Kugeln, eine 2 blaue Kugeln, und die dritte 1 rote und 1 blaue Kugel.

a. Sie wählen zufällig eine Urne und dann zufällig eine Kugel aus dieser Urne. Was ist die Wahrscheinlichkeit, daß Sie eine blaue Kugel in der Hand halten?
b. Angenommen, Sie haben eine blaue Kugel gezogen, was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die andere Kugel in der Urne rot ist?

Lösung: Wir definieren die Ereignisse
$B :=$ "Es wurde eine blaue Kugel gezogen"
$U_1 :=$ "Es wurde eine Kugel aus Urne 1 gezogen"
$U_2 :=$ "Es wurde eine Kugel aus Urne 2 gezogen"
$U_3 :=$ "Es wurde eine Kugel aus Urne 3 gezogen".
Da wir die Urne zufällig wählen, ist $\mathbb{P}(U_1) = \mathbb{P}(U_2) = \mathbb{P}(U_3) = \frac{1}{3}$.

a. Über totale Wahrscheinlichkeit berechnen wir

$$\mathbb{P}(B) \;=\; \mathbb{P}(B|U_1)\,\mathbb{P}(U_1) + \mathbb{P}(B|U_2)\,\mathbb{P}(U_2) + \mathbb{P}(B|U_3)\,\mathbb{P}(U_3) \;=\; 0 \cdot \tfrac{1}{3} + 1 \cdot \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{3} \;=\; \tfrac{1}{2}\,.$$

b. Die einzige Urne die sowohl eine rote, als auch eine blaue Kugel enthält, ist Urne 3. Deshalb berechnen wir über den Satz von Bayes

$$\mathbb{P}(U_3|B) \;=\; \frac{\mathbb{P}(B|U_3)\,\mathbb{P}(U_3)}{\mathbb{P}(B)} \;=\; \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} \;=\; \tfrac{1}{3}\,.$$

Aufgabe 6.2
Ein Mediziner hat für eine neue Behandlung einer tödlichen Krankheit die folgenden Daten bei Patienten in der Stadt und auf dem Land gesammelt:

	behandelt (Stadt)	nicht behandelt (Stadt)	behandelt (Land)	nicht behandelt (Land)
geheilt	1000	50	95	5000
gestorben	900	950	5	5000

a. Wie groß ist für einen Patienten, der behandelt wurde, die Wahrscheinlichkeit geheilt zu werden? Wie groß ist für einen Patienten, der nicht behandelt wurde, die Wahrscheinlichkeit geheilt zu werden? Empfehlen Sie die Zulassung der neuen Behandlungsmethode?
b. Wie groß ist für einen Patienten, der behandelt wurde und in der Stadt lebt, die Wahrscheinlichkeit geheilt zu werden? Wie groß ist für einen Patienten, der nicht behandelt und in der Stadt lebt die Wahrschenlichkeit geheilt zu werden?

c. Wie groß ist für einen Patienten, der behandelt wurde und auf dem Land lebt, die Wahrscheinlichkeit geheilt zu werden? Wie groß ist für einen Patienten, der nicht behandelt und auf dem Land lebt, die Wahrschenlichkeit geheilt zu werden?

d. Bleiben Sie bei Ihrer Empfehlung, die neue Behandlungsmethode zuzulassen bzw. nicht zuzulassen?

Lösung: Sei Ω die Menge der Patienten. Wir definieren die Ereignisse
$B :=$"Ein Patient wurde behandelt"
$S :=$"Ein Patient lebt in der Stadt"
$H :=$"Ein Patient wurde geheilt".
Jeder Patient ist also ein $\omega \in \Omega$ und die Zahlen in der Tabelle geben an, wie viele Elemente im jeweiligen Schnitt von drei Ereignissen enthalten sind. Da die Schnitte disjunkt sind, errechnet man $|\Omega| = 13000$, $|B| = 2000$, $|\overline{B}| = 11000$, $|B \cap H| = 1095$ und $|\overline{B} \cap H| = 5050$ durch Addieren der Werte. Die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis $E \subseteq \Omega$ errechnet man durch $\mathbb{P}(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}$.

a. $\mathbb{P}(H|B) = \frac{\mathbb{P}(B \cap H)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1095}{2000} = 0,5475$

$\mathbb{P}(H|\overline{B}) = \frac{\mathbb{P}(\overline{B} \cap H)}{\mathbb{P}(\overline{B})} = \frac{5050}{11000} \approx 0,459$

b. $\mathbb{P}(H|B \cap S) = \frac{\mathbb{P}(H \cap B \cap S)}{\mathbb{P}(B \cap S)} = \frac{1000}{1900} \approx 0,526$

$\mathbb{P}(H|\overline{B} \cap S) = \frac{\mathbb{P}(H \cap \overline{B} \cap S)}{\mathbb{P}(\overline{B} \cap S)} = \frac{50}{1000} = 0,05$

c. $\mathbb{P}(H|B \cap \overline{S}) = \frac{\mathbb{P}(H \cap B \cap \overline{S})}{\mathbb{P}(B \cap \overline{S})} = \frac{95}{100} = 0,95$

$\mathbb{P}(H|\overline{B} \cap \overline{S}) = \frac{\mathbb{P}(H \cap \overline{B} \cap \overline{S})}{\mathbb{P}(\overline{B} \cap \overline{S})} = \frac{5000}{10000} = 0,5$

Aufgabe 6.3

Wir betrachten nochmal Aufgabe **5.4** (für $n = 3$); jetzt ist aber der Geldkoffer (der Preis einer Spielshow) in 45% aller Fälle hinter Tür 1, in 40% aller Fälle hinter Tür 2, und in 15% aller Fälle hinter Tür 3. Die restlichen Regeln bleiben gleich, d.h., Sie wählen eine Tür, woraufhin der Showmaster unter den verbleibenden beiden Türen eine auswählt,[1] hinter der sich heiße Luft verbirgt. Danach bietet er Ihnen an, die Tür zu wechseln. Als erfahreneR MathematikerIn wählen Sie erstmal Tür 1. Der Showmaster zeigt Ihnen die heiße Luft hinter einer anderen Tür und bietet Ihnen an, zu wechseln. Nehmen Sie an oder lehnen Sie ab?

Lösung: Wir definieren für $k = 1, 2, 3$ die Ereignisse
$G_k :=$ "Der Gewinn ist hinter Tür k" und
$T_k :=$ "Der Showmaster öffnet Tür k".
Mittels totaler Wahrscheinlichkeit berechnen wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_2) &= \mathbb{P}(T_2|G_1)\,\mathbb{P}(G_1) + \mathbb{P}(T_2|G_2)\,\mathbb{P}(G_2) + \mathbb{P}(T_2|G_3)\,\mathbb{P}(G_3) = 0,5 \cdot 0,45 + 0 \cdot 0,4 + 1 \cdot 0,15 \\
&= 0,375 \\
\mathbb{P}(T_3) &= \mathbb{P}(T_3|G_1)\,\mathbb{P}(G_1) + \mathbb{P}(T_3|G_2)\,\mathbb{P}(G_2) + \mathbb{P}(T_3|G_3)\,\mathbb{P}(G_3) = 0,5 \cdot 0,45 + 1 \cdot 0,4 + 0 \cdot 0,15 \\
&= 0,625\,.
\end{aligned}$$

[1] Falls der Showmaster die Wahl hat, trifft er diese zufällig.

Nach dem Satz von Bayes gilt dann

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(G_1|T_2) &= \frac{\mathbb{P}(T_2|G_1)\,\mathbb{P}(G_1)}{\mathbb{P}(T_2)} = \frac{0,5\cdot 0,45}{0,375} = 0,6\\
\mathbb{P}(G_3|T_2) &= 1-\mathbb{P}(G_1|T_2)-\mathbb{P}(G_2|T_2) = 1-0,6-0 = 0,4\\
\mathbb{P}(G_1|T_3) &= \frac{\mathbb{P}(T_3|G_1)\,\mathbb{P}(G_1)}{\mathbb{P}(T_3)} = \frac{0,5\cdot 0,45}{0,625} = 0,36\\
\mathbb{P}(G_2|T_3) &= 1-\mathbb{P}(G_1|T_3)-\mathbb{P}(G_3|T_3) = 1-0,36-0 = 0,64\,.
\end{aligned}$$

Es empfiehlt sich also bei Tür 1 zu bleiben, falls der Showmaster Tür 2 öffnet und man sollte wechseln, falls Tür 3 geöffnet wurde.

Aufgabe 6.4

a. Angenommen, ein Test für die Krankheit K gibt zu 99% sowohl ein positives Ergebnis, falls ein Patient K hat, als auch ein negatives Ergebnis, falls K nicht vorliegt. Wir betrachten die bedingte Wahrscheinlichkeit, daß ein zufällig gewählter Patient mit einem positiven Test die Krankheit K hat, als Funktion des globalen Anteils der Bevölkerung, bei dem K vorliegt. Skizzieren und diskutieren Sie den Graph dieser Funktion.

b. Nehmen Sie jetzt an, daß K bei 1% der Bevölkerung vorliegt. Sie haben einen neuen Test, der wieder zu 99% ein positives Ergebnis gibt, falls ein Patient K hat; der Anteil a für das der Test ein negatives Ergebnis gibt, falls K nicht vorliegt, ist jetzt ein Parameter. Wir betrachten wieder die bedingte Wahrscheinlichkeit, daß ein zufällig gewählter Patient mit einem positiven Test die Krankheit K hat, diesmal als Funktion von a. Skizzieren und diskutieren Sie den Graph dieser Funktion.

Lösung: Sei K das Ereignis, dass ein Patient die Krankheit hat und sei T das Ereignis, dass der Test ein positives Ergebnis zeigt.

a. Wir wollen $\mathbb{P}(K|T)$ als Funktion von $\mathbb{P}(K)$ schreiben. Nach dem Satz vom Bayes und dem Satz über die totale Wahrscheinlichkeit gilt

$$\mathbb{P}(K|T) \;=\; \frac{\mathbb{P}(T|K)\,\mathbb{P}(K)}{\mathbb{P}(T)} \;=\; \frac{\mathbb{P}(T|K)\,\mathbb{P}(K)}{\mathbb{P}(T|K)\,\mathbb{P}(K)+\mathbb{P}(T|\overline{K})\,\mathbb{P}(\overline{K})} \;=\; \frac{0,99\,\mathbb{P}(K)}{0,99\,\mathbb{P}(K)+0,01(1-\mathbb{P}(K))}\,.$$

Die Funktion steigt zunächst stark an. Bei einem Anteil von 10% der Bevölkerung, bei dem K vorliegt, ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem positiven Test die Krankheit tatsächlich vorliegt schon bei über 90%. Dann steigt die Funktion immer langsamer. Z.B. bei $\mathbb{P}(K) = 50\%$ ist der Wert für $\mathbb{P}(K|T)$ bei 99%, bis bei $\mathbb{P}(K) = 100\%$ sowieso jeder Patient K hat und daher egal ist, was der Test anzeigt, d.h. $\mathbb{P}(K|T) = 100\%$.

b. Jetzt betrachten wir $\mathbb{P}(K|T)$ als Funktion von a $= \mathbb{P}(\overline{T}|\overline{K}) = 1-\mathbb{P}(T|\overline{K})$. Wir berechnen wieder

$$\mathbb{P}(K|T) \;=\; \frac{\mathbb{P}(T|K)\,\mathbb{P}(K)}{\mathbb{P}(T|K)\,\mathbb{P}(K)+\mathbb{P}(T|\overline{K})\,\mathbb{P}(\overline{K})} \;=\; \frac{0,99\cdot 0,01}{0,99\cdot 0,01+(1-\mathbb{P}(\overline{T}|\overline{K}))\,0,99}\,.$$

Auch hier steigt die Funktion auf dem gesamten Definitionsbereich, wobei das Verhalten umgekehrt ist wie bei **a**. Ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem gesunden (bzgl. K) Patienten, der Test dies auch bestätigt, bei 90%, so ist die Wahrschienlichkeit, dass, gegeben der Test zeigt ein positives Ergebnis, dies auch wirklich der Fall ist, noch kleiner als 10%. Dann steigt die Funktion allmählich schneller. Bei $\mathbb{P}(\overline{T}|\overline{K}) = 99\%$ kann man sich zu

50% auf ein positives Testergebnis verlassen und für den Fall, dass der Test einem gesunden Patienten immer das richtige Ergebnis zeigt, kann man sich sich bei einem positiven Testergebnis auch zu 100% sicher sein, dass K tatsächlich vorliegt.