Freie Universität Berlin

Prof. Matthias Beck
Hauke Sprink
Institut für Mathematik
AG Diskrete Geometrie
Arnimallee 2

Wahrscheinlichkeit & Statistik
Wintersemester 2019/20

7. Übung (Lösungen)

Aufgabe 7.1
Wir betrachten den endlichen Wahrscheinlichkeitkeitsraum $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ mit

$$\mathbb{P}(\omega_1) = \mathbb{P}(\omega_2) = \mathbb{P}(\omega_3) = \frac{1}{3}$$

sowie die Zufallsvariablen X, Y und Z mit

$$\begin{aligned} X(\omega_1) &:= 1, & X(\omega_2) &:= 2, & X(\omega_3) &:= 3; \\ Y(\omega_1) &:= 2, & Y(\omega_2) &:= 3, & Y(\omega_3) &:= 1; \\ Z(\omega_1) &:= 3, & Z(\omega_2) &:= 1, & Z(\omega_3) &:= 2. \end{aligned}$$

a. Zeigen Sie, dass die drei Zufallsvariablen die gleiche Wahrscheinlichkeitsverteilung besitzen.
b. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der drei neuen Zufallsvariablen $X+Y$, $X+Y-Z$ und $\sqrt{(X^2+Y^2)Z}$.

Lösung:

a. Es ist $X(\Omega) = Y(\Omega) = Z(\Omega) = [3]$.
Es ist zu zeigen, dass für $m = 1, 2, 3$ gilt, dass $(\mathbb{P} \circ X^{-1})(m) = (\mathbb{P} \circ Y^{-1})(m) = (\mathbb{P} \circ Z^{-1})(m)$
Wir rechnen das für 1 explizit nach; 2 und 3 zeigt man analog.
$\mathbb{P}(X^{-1}(1)) = \mathbb{P}(\omega_1) = \frac{1}{3}$
$\mathbb{P}(Y^{-1}(1)) = \mathbb{P}(\omega_2) = \frac{1}{3}$
$\mathbb{P}(Z^{-1}(1)) = \mathbb{P}(\omega_3) = \frac{1}{3}$
Da eine Gleichverteilung auf Ω vorliegt, genügt es zu zeigen, dass für jedes Element im Bild, das Urbild unter allen Zufallsvariablen gleich viele Elemente enthält.

b. $(X+Y)(\omega_1) = X(\omega_1) + Y(\omega_1) = 1 + 2 = 3$
$(X+Y)(\omega_2) = X(\omega_2) + Y(\omega_2) = 2 + 3 = 5$
$(X+Y)(\omega_3) = X(\omega_3) + Y(\omega_3) = 3 + 1 = 4$
$X+Y$ bildet Ω bijektiv auf $(X+Y)(\Omega) = \{3,4,5\}$ ab, deshalb gibt es für alle $z_i \in (X+Y)(\Omega)$ ein eindeutiges Urbild ω_i mit $\mathbb{P}_{X+Y}(z_i) = \mathbb{P}(\omega_i) = \frac{1}{3}$.

$(X+Y-Z)(\omega_1) = X(\omega_1) + Y(\omega_1) - Z(\omega_1) = 1 + 2 - 3 = 0$
$(X+Y-Z)(\omega_2) = X(\omega_2) + Y(\omega_2) - Z(\omega_2) = 2 + 3 - 1 = 4$
$(X+Y-Z)(\omega_3) = X(\omega_3) + Y(\omega_3) - Z(\omega_3) = 3 + 1 - 2 = 2$

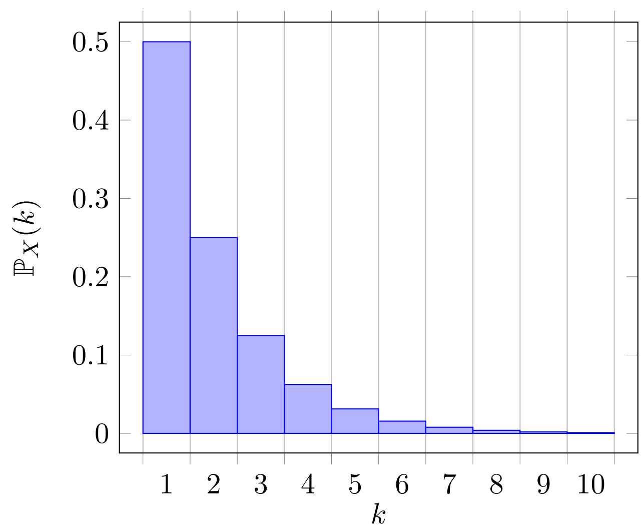
$(\sqrt{(X^2+Y^2)Z})(\omega_1) = \sqrt{(X(\omega_1)^2 + Y(\omega_1)^2)Z(\omega_1)} = \sqrt{(1+4)3} = \sqrt{15}$
$(\sqrt{(X^2+Y^2)Z})(\omega_2) = \sqrt{(X(\omega_2)^2 + Y(\omega_2)^2)Z(\omega_2)} = \sqrt{(4+9)1} = \sqrt{13}$
$(\sqrt{(X^2+Y^2)Z})(\omega_3) = \sqrt{(X(\omega_3)^2 + Y(\omega_3)^2)Z(\omega_3)} = \sqrt{(9+1)2} = \sqrt{20}$

Für die Verteilung von $X + Y - Z$ und $\sqrt{(X^2 + Y^2)Z}$ gilt dasselbe Argument wie für $X + Y$.

Aufgabe 7.2
Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, beim mehrmaligen Werfen einer fairen Münze erstmalig beim k-ten Wurf „Kopf“ zu erhalten. Erstellen Sie eine Stabdiagramm für die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(X = k)$ für $1 \leq k \leq 10$.

Lösung: Es liegt eine geometrische Verteilung vor, da das erstmalige Auftreten modelliert wird mit Parameter $p = \frac{1}{2}$, weil der Würfel fair ist. Das heisst,

$$\mathbb{P}(X = k) \;=\; \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{k-1}}_{k-1 \text{ mal Zahl}} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)}_{1 \text{ mal Kopf}} \;=\; \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$



Aufgabe 7.3
Wir betrachten ein Gerichtsurteil, bei dem das Urteil „schuldig“ von 8 der 12 Geschworenen bestätigt werden muss, damit es gültig wird. Die Geschworenen treffen ihre Entscheidungen unabhängig voneinander und die Wahrscheinlichkeit, dass ein Geschworener das richtige Urteil trifft, ist für alle Geschworen gleich und beträgt ϑ. Wie groß ist die Warscheinlichkeit, dass das Gerichtsurteil der Wahrheit entspricht (als Funktion von ϑ)? Berechnen Sie den Wert dieser Wahrscheinlichkeit für $\vartheta = 80\%$.

Lösung: Wir definieren $\Omega := \{0, 1\}^{12}$ und die Zufallsvariable $X : \Omega \mapsto [12]$ durch $X(\omega) := \omega_1 + \cdots + \omega_{12}$. Diese Zufallsvariable X ist binomialverteilt, da die Geschworenen ihre Entscheidungen unabhängig voneinander treffen. D.h.

$$\mathbb{P}(X = k) \;=\; \binom{n}{k} \vartheta^k (1 - \vartheta)^{n-k}.$$

Fall 1: Der Angeklagte ist schuldig. Das endgültige Urteil entspricht der Wahrheit genau dann, wenn $X \geq 8$.

$$P(X \geq 8) \;=\; P(X=8) + P(X=9) + \cdots + \mathbb{P}(X=12) \;=\; 0,9275\,.$$

Fall 2: Der Angeklagte ist unschuldig. Das endgültige Urteil entspricht der Wahrheit genau dann, wenn $X \geq 5$, da man nur 5 Geschworene benötigt, die richtig entscheiden, um das Urteil abzulehnen.

$$P(X \geq 5) \;=\; P(X=5) + P(X=6) + \cdots + \mathbb{P}(X=12) \;=\; 0,9994\,.$$

Aufgabe 7.4

Bei der elektronischen Datenübertragung werden Nachrichten in einer Folge von Signalen mit Werten 0 oder 1 kodiert, eine Nachricht wird dabei als ein digitales Wort $\omega = (a_1, \ldots, a_n) \in \{0;1\}^n$ der Länge n aufgefasst. Bei der Übertragung der Nachricht $\omega = (a_1, \ldots, a_n)$ kann ein Fehler $\epsilon = (e_1, \ldots, e_n) \in \{0;1\}^n$ auftreten, dann wird das Wort $\omega' = (a'_1, \ldots, a'_n)$ empfangen. Wir einigen uns, dass $e_i = 0$ genau dann gilt, falls $a_i = a'_i$ und dass $e_i = 1$ genau dann gilt, falls $a_i \neq a'_i$. Wir nehmen an, dass Übertragungsfehler an verschiedenen Stellen im Wort unabhängig voneinander vorkommen. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler an der Stelle i vorkommt, beträgt p.

a. Die Zufallsvariable X zählt die bei der Datenübertragung auftretenden Fehler. Leiten Sie eine Formel für die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}_X(k)$ her.
b. Bestimmen Sie für $n = 16$, $p = 0{,}1$ und $0 \leq k \leq 5$ die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}_X(k)$ und erstellen Sie ein Stabdiagramm für diese Werte.
c. Es gilt weiterhin $n = 16$ und $p = 0{,}1$. Wie groß muss k gewählt werden, damit die Wahrscheinlichkeit für k oder mehr Übertragungsfehler höchstens 2% ist?

Lösung:

a. Die Zufallsvariable X zählt die auftretenden Fehler, d.h. sie bildet aus dem "Fehlerraum" $\{0,1\}^n$ ab nach $\{0,1,\ldots,n\}$ via $X(\epsilon) = \sum_{i=1}^n \epsilon_i$. Für $\mathbb{P}_X(k) = \mathbb{P}(X^{-1}(k))$ überlegen wir uns für welche $\epsilon \in \Omega$ gilt, dass

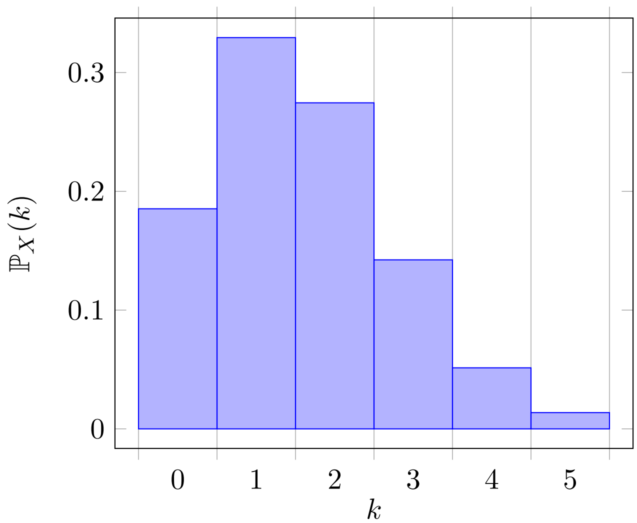
$$\epsilon = X^{-1}(k) \iff X(\epsilon) = \sum_{i=0}^{n} \epsilon_i = k\,.$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn wir genau k mal $\epsilon_i = 1$ haben. Hierfür gibt es $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten und die Wahrscheinlichkeit für ein solches Ereignis ist $p^k(1-p)^{n-k}$, da die Fehler unabhändig voneinander auftreten. Daraus folgt

$$\mathbb{P}_X(k) \;=\; \mathbb{P}\left(X^{-1}(k)\right) \;=\; \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

d.h. X ist binomialverteilt.

b. $\mathbb{P}(X=0) = 0.1853$
$\mathbb{P}(X=1) = 0.3294$
$\mathbb{P}(X=2) = 0.2745$
$\mathbb{P}(X=3) = 0.1423$
$\mathbb{P}(X=4) = 0.0514$
$\mathbb{P}(X=5) = 0.0137$



c. $\mathbb{P}(X \geq k) \leq 0,02 \iff \mathbb{P}(X < k) \geq 0,98$. Wir suchen das kleinste k, für das $\sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{P}_X(i) \geq 0,98$.

$$\sum_{i=0}^{3} \mathbb{P}(X = i) \;=\; 0,9315 \;<\; 0,98 \;<\; 0,9829 \;=\; \sum_{i=0}^{4} \mathbb{P}(X = i)\,.$$

Damit ist $k = 5$.