Freie Universität Berlin

Prof. Matthias Beck
Hauke Sprink
Institut für Mathematik
AG Diskrete Geometrie
Arnimallee 2

WAHRSCHEINLICHKEIT & STATISTIK
Wintersemester 2019/20

# 8. Übung (Lösungen)

**Aufgabe 8.1**
Skizzieren Sie (z.B. mit Hilfe eines Stabdiagramms) die

**a.** Binomialverteilung für $n = 100$, $p = 2\%$ und $k = 0, 5, 10, \dots, 100$;
**b.** Poissionverteilung für $\lambda = 2$ und $k = 0, 5, 10, \dots, 100$.[1]

**Aufgabe 8.2**
In einer Gemeinschaftspraxis von Augenärzten ergab eine mehrjährige Auswertung der Patientenkartei, dass im Durchschnitt jeder 15. Patient an Grauem Star leidet.

**a.** Im Laufe eines Vormittags rufen unabhängig voneinander 15 Personen an und bitten um einen Termin. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat genau eine dieser Personen Grauen Star?
**b.** Wie viele Personen müssen unabhängig voneinander um einen Termin bitten, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90% mindestens ein Patient darunter ist, der an Grauem Star leidet?

**Lösung:** Es liegt eine Binomialverteiung vor. Wir definieren $\Omega := \{0,1\}^n$ und $X : \Omega \mapsto \{0, 1, ..., n\}, X(\omega) = \sum_{k=0}^{n} \omega_i$ gibt die Anzahl der erkranken Anrufer an mit

$$\mathbb{P}_X(k) \;=\; \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

**a.** Für $n = 15$, $k = 1$ und $p = \frac{1}{15}$ folgt $\mathbb{P}(X = 1) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx 38,1\%$.
**b.** Gesucht ist $n$, so dass $\mathbb{P}(X \geq 1) > 0,9$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\mathbb{P}(X = 0) < 0,1$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X=0) \;&=\; \tbinom{n}{0}(\tfrac{1}{15})^0(1-\tfrac{1}{15})^{n-0} \;=\; (\tfrac{14}{15})^n \;<\; 0,1 \\ \iff n \;&>\; \frac{\log(0,1)}{\log(\frac{14}{15})} \;\approx\; 33,37\,. \end{aligned}$$

Es müssen also mindestens 34 Personen unabhängig voneinander anrufen.

**Aufgabe 8.3**
Bei der Herstellung einer Ware ist ein kleiner Anteil von 6% schon bei der Produktion defekt. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Lieferung von $N = 50$ Stück dieser Ware höchstens $n = 4$ Ausschussstücke dabei sind.

**a.** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit exakt.
**b.** Wie lautet die Wahrscheinlichkeit, wenn die zu Grunde liegende Verteilung durch die Poisson-Verteilung angenähert wird?

[1] Wenn Sie hierfür einen Computer verwenden (was ich Ihnen rate), reichen Sie bitte den Ausdruck Ihres Programmcodes mit ein.

**Lösung:**

**a.** Die Zufallsvariable $X : \{0,1\}^{50} \to \{0,1,...,50\}$, die die Ausschussstücke zählt ist binomialverteilt, d.h. $\mathbb{P}_X(n) = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}$ mit Pametern $p = 0,06, N = 50, n = 4$.

$$\mathbb{P}(X \leq 4) \; = \; \sum_{k=0}^{4} \mathbb{P}_X(k) \; \approx \; 82,06\% \,.$$

**b.** Mit $\lambda := Np = 3$ rechnen wir $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} \frac{\lambda^k}{k!} \, e^{-\lambda} \approx 81,53\%$.

**Aufgabe 8.4**
In einer Jahrgangsstufe einer Schule haben gewöhnlicherweise 10% der Schülerinnen und Schüler keine Mathematikhausaufgaben erledigt. Die Mathematiklehrerin einer Klasse prüft bei ihren Schülerinnen und Schülern nacheinander die Existenz der erledigten Hausaufgaben, bis sie eine Person findet, die keine Hausaufgaben erledigt hat.

**a.** Welche Wahrscheinlichkeitsverteilung ist angemessen? Geben Sie die zugehörigen Parameter an.
**b.** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Person ohne Hausaufgaben Person $x$ mit $10 \leq x \leq 20$ ist.

**Lösung:**

**a.** Geometrische Verteilung mit $p = 0,1$, d.h. $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$.
**b.**

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[10 \leq X \leq 20] &= \mathbb{P}[X \geq 10] - \mathbb{P}[X \geq 21] \\
&= \sum_{k=10}^{\infty} p(1-p)^{k-1} - \sum_{k=21}^{\infty} p(1-p)^{k-1} \\
&= p\Big( \sum_{k=9}^{\infty} (1-p)^k - \sum_{k=20}^{\infty} (1-p)^k \Big) \\
&= p\Big( (1-p)^9 \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k - (1-p)^{20} \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k \Big) \\
&= p\Big( \frac{(1-p)^9}{1-(1-p)} - \frac{(1-p)^{20}}{1-(1-p)} \Big) \\
&= p\Big( \frac{(1-p)^9}{p} - \frac{(1-p)^{20}}{p} \Big) \\
&= (1-p)^9 - (1-p)^{20} \\
&= (0,9)^9 - (0,9)^{20} \approx 0,2658
\end{aligned}$$