Freie Universität Berlin

Prof. Matthias Beck
Hauke Sprink
Institut für Mathematik
AG Diskrete Geometrie
Arnimallee 2

WAHRSCHEINLICHKEIT & STATISTIK
Wintersemester 2019/20

9. Übung (Lösungen)

Aufgabe 9.1
Skizzieren Sie (z.B. mit Hilfe eines Stabdiagramms) die

a. Binomialverteilung für $n = 1000$, $p = 2\%$
b. Binomialverteilung für $n = 50$, $p = 40\%$
c. Poissionverteilung für $\lambda = 20$

jeweils für $10 \leq k \leq 30$.

Aufgabe 9.2
Eine Firma verkauft Batterien im 6er-Pack. Erfahrungsgemäß funktionieren bei

5%	aller 6er-Packs	eine Batterie
1%	aller 6er-Packs	zwei Batterien
0,01%	aller 6er-Packs	drei Batterien
0,0001%	aller 6er-Packs	mehr als drei Batterien

nicht. Vor einem Kauf testen wir 3 der 6 Batterien (zufällig) und kaufen den 6er-Pack nur, wenn alle drei funktionieren. Was ist die Wahrscheinlichkeit, daß wir einen zufällig ausgewählten 6er-Pack kaufen?
Lösung: Sei Ω die Menge aller 6-er Packs. Wir kaufen nur, wenn alle 3 getesteten Batterien funktionieren. Wir definieren die Ereignisse

$$\begin{aligned} E &:= \text{“alle 3 getesteten Batterien funktionieren”;} \\ F_j &:= \text{“genau } j \text{ defekte Batterien im zufällig ausgewählten 6er-Pack”}, \ j \in \{0,1,2,3\} \\ F_4 &:= \text{“mindestens 4 defekte Batterien im zufällig ausgewählten 6er-Pack.”} \end{aligned}$$

Dann ist nach Voraussetzung $\mathbb{P}(E|F_4) = 0$ und wir berechnen mittels hypergeometrischer Verteilung für $j \in \{0,1,2,3\}$

$$\mathbb{P}(E|F_j) = \frac{\binom{6-j}{3}\binom{j}{0}}{\binom{6}{3}}$$

und dann mittels totaler Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E) &= \mathbb{P}(E|F_0)\,\mathbb{P}(F_0) + \mathbb{P}(E|F_1)\,\mathbb{P}(F_1) + \mathbb{P}(E|F_2)\,\mathbb{P}(F_2) + \mathbb{P}(E|F_3)\,\mathbb{P}(F_3) + \mathbb{P}(E|F_4)\,\mathbb{P}(F_4) \\ &= \mathbb{P}(E|F_0) \cdot 0,939899 + \mathbb{P}(E|F_1) \cdot 0,05 + \mathbb{P}(E|F_2) \cdot 0,01 + \mathbb{P}(E|F_3) \cdot 0,0001 \\ &\approx 0,9669\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 9.3
Sie haben eine Firma, die Weihnachstbäume züchtet. Pro Baum machen Sie 15 Euro Nettogewinn; pro Baum, der am Schluß der Verkaufssaison noch unverkauft ist, machen Sie 5

Euro Verlust. Sie wollen gerne herausfinden, wie groß Ihr Lagerbestand sein sollte, um den durchschnittlichen Gesamtgewinn der Saison zu maximieren. Als erfahreneR MathematikerIn setzen Sie hierfür eine Zufallsvariable X an, die gleich der Anzahl Bäume ist, die Sie in der Saison verkaufen werden; X hat eine uns unbekannte Verteilung $\mathbb{P}_X$.

a. Bestimmen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariable $f_b(X) :=$ Gesamtgewinn bei einem Bestand von b Bäumen.[1]

b. Berechnen Sie die Differenz $\mathbb{E}(f_{b+1}(X)) - \mathbb{E}(f_b(X))$, vereinfachen Sie die Bedingung, daß diese Differenz positiv ist, und leiten Sie daraus ein Kriterium ab, für welches b der durchschnittliche Gesamtgewinn maximiert wird.

Lösung:

a. $X : \Omega \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$, mit uns unbekannter Verteilung $\mathbb{P}_X$. Wir definieren $f_b(X) : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{Z}$ via

$$f_b(X(\omega)) \;=\; \begin{cases} 15X(\omega) - 5(b - X(\omega)) & \text{falls } X(\omega) \leq b, \\ 15b & \text{falls } X(\omega) > b. \end{cases}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(f_b(X)) \;&=\; \sum_{j=0}^{\infty} f_b(j)\,\mathbb{P}_X(j) \;=\; \sum_{j=0}^{b} \big(15j - 5(b-j)\big)\,\mathbb{P}_X(j) + \underbrace{\sum_{j=b+1}^{\infty} 15b\,\mathbb{P}_X(j)}_{15b(1-\sum_{j=0}^{b}\mathbb{P}_X(j))} \\
&=\; 15b + \sum_{j=0}^{b} \Big(\big(15j - 5b + 5j - 15b\big)\,\mathbb{P}_X(j)\Big) \\
&=\; 15b + 20\sum_{j=0}^{b} (j-b)\,\mathbb{P}_X(j)\,.
\end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(f_{b+1}(X)) \;&=\; 15(b+1) + 20\sum_{j=0}^{b+1}(j-(b+1))\mathbb{P}_X(j) \\
&=\; 15(b+1) + 20\sum_{j=0}^{b}(j-b-1)\mathbb{P}_X(j) \\
&=\; 15b + 15 + 20\sum_{j=0}^{b}(j-b)\mathbb{P}_X(j) - 20\sum_{j=0}^{b}\mathbb{P}_X(j)
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\mathbb{E}(f_{b+1}(X)) - \mathbb{E}(f_b(X)) \;=\; 15 - 20\sum_{j=0}^{b}\mathbb{P}_X(j) \;>\; 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{3}{4} \;>\; \sum_{j=0}^{b}\mathbb{P}_X(j)\,.$$

[1] Dieser Erwartungswert hängt sowohl von b, als auch der Verteilung $\mathbb{P}_X$ ab.

Der durchschnittliche Gesamtgewinn steigt also, solange $\frac{3}{4} > \sum_{j=0}^{b} \mathbb{P}_X(j)$. Das kleinste b für das $\frac{3}{4} \leq \sum_{j=0}^{b+1} \mathbb{P}_X(j)$ gilt, maximiert den Gewinn.

Aufgabe 9.4
Diese Aufgabe gibt einen alternativen Weg zur Berechnung des Erwartungswert (und der Varianz) für die hypergeometrische Verteilung.

a. Zeigen Sie, daß für ganze Zahlen $0 \leq a, b \leq c$ gilt $\displaystyle\sum_{j=0}^{\min\{a,b\}} \binom{b}{j}\binom{c-b}{a-j} = \binom{c}{a}$.

b. Berechnen Sie den hypergeometrischen Erwartungswert

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{\min\{m,n\}} k \,\frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}},$$

indem Sie $k\binom{m}{k} = m\binom{m-1}{k-1}$ ausnutzen und danach die Summenvariable um 1 verschieben.

c. Wiederholen Sie diese Argumentation für

$$\sum_{k=2}^{\min\{m,n\}} k(k-1) \,\frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}},$$

und leiten Sie daraus die Varianz für die hypergeometrische Verteilung ab.

Lösung:

a. Wir wollen alternativ zu $\binom{c}{a}$ berechnen, wie viele Möglichkeiten es gibt, a Elemente aus einer c-elementigen Menge zu wählen. Dazu teilen wir die Menge in eine b- und eine $(c-b)$-elementige Menge auf. Aus der ersten wählen wir j Elemente, also müssen wir aus der zweiten noch $a-j$ wählen. Hierfür gibt es $\binom{b}{j}\binom{c-b}{a-j}$ Möglichkeiten. Wir müssen noch über mögliche Werte von j addieren.

b.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{\min\{m,n\}} k \,\frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=1}^{\min\{m,n\}} k \binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k} \\
&= \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=1}^{\min\{m,n\}} m \binom{m-1}{k-1}\binom{(N-1)-(m-1)}{(n-1)-(k-1)} \\
&= \frac{m}{\binom{N}{n}} \sum_{k=0}^{\min\{m,n\}-1} \binom{m-1}{k}\binom{(N-1)-(m-1)}{(n-1)-k} \\
&\overset{\mathbf{a.}}{=} \frac{m}{\binom{N}{n}} \binom{N-1}{n-1} = \frac{mn}{N}.
\end{aligned}$$

c.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \;=\; \sum_{k=1}^{\min\{m,n\}} k^2 \,\frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}} - \left(\frac{mn}{N}\right)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{\min\{m,n\}} (k(k-1)+k)\,\frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}} - \left(\frac{mn}{N}\right)^2 \\
&= \sum_{k=2}^{\min\{m,n\}} (k(k-1))\,\frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}} + \mathbb{E}(X) - \left(\frac{mn}{N}\right)^2 \\
&= \frac{m(m-1)}{\binom{N}{n}} \sum_{k=2}^{\min\{m,n\}} \binom{m-2}{k-2}\binom{N-m}{n-k} + \frac{mn}{N} - \left(\frac{mn}{N}\right)^2 \\
&= \frac{m(m-1)}{\binom{N}{n}} \sum_{k=0}^{\min\{m,n\}-2} \binom{m-2}{k}\binom{(N-2)-(m-2)}{(n-2)-k} + \frac{mn}{N} - \left(\frac{mn}{N}\right)^2 \\
&\overset{\textbf{a.}}{=} \frac{m(m-1)}{\binom{N}{n}}\binom{N-2}{n-2} + \frac{mn}{N} - \left(\frac{mn}{N}\right)^2 \\
&= \frac{m(m-1)n(n-1)}{N(N-1)} + \frac{mn}{N} - \left(\frac{mn}{N}\right)^2 \\
&= \frac{mn}{N}\left(\frac{(m-1)(n-1)}{N-1} + 1 - \frac{mn}{N}\right) \\
&= \frac{mn(N-m)(N-n)}{N^2(N-1)}\,.
\end{aligned}
$$