Freie Universität Berlin

Prof. Matthias Beck
Hauke Sprink
Institut für Mathematik
AG Diskrete Geometrie
Arnimallee 2

WAHRSCHEINLICHKEIT & STATISTIK
Wintersemester 2019/20

10. Übung (Lösungen)

Aufgabe 10.1
Gegeben seien die folgenden drei Urnen, in denen sich N Kugeln befinden, von denen r Kugeln rot und $N-r$ Kugeln schwarz sind:

	N	r
Urne 1	10	3
Urne 2	20	12
Urne 3	100	70

Ohne zurückzulegen ziehen wir nun aus jeder Urne jeweils 7 Kugeln.

a. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, genau eine rote Kugel zu ziehen.
b. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, genau zwei rote Kugeln zu ziehen.
c. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, nur rote Kugeln zu ziehen.

Lösung: Wir ziehen insgesamt 21 Kugeln. X_i zählt die Anzahl der roten Kugeln beim Ziehen aus Urne i. Da wir ohne Zurücklegen ziehen, ist X_i hypergeometrisch verteilt. Um die Gesamtanzahl roter Kugeln zu zählen, definieren wir $X := X_1 + X_2 + X_3$.

a. Die rote Kugel kann aus jeder der drei Urnen sein, aus den anderen beiden dürfen wir dann nur schwarze Kugeln ziehen.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=1) &= \mathbb{P}(X_1 = 1 \wedge X_2 = 0 \wedge X_3 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = 0 \wedge X_2 = 1 \wedge X_3 = 0) \\ &\quad + \mathbb{P}(X_1 = 0 \wedge X_2 = 0 \wedge X_3 = 1)\end{aligned}$$

Weil die X_i unabhängig sind, ist

$$\mathbb{P}(X_1 = 1 \wedge X_2 = 0 \wedge X_3 = 0) = \mathbb{P}_{X_1}(1)\,\mathbb{P}_{X_2}(0)\,\mathbb{P}_{X_3}(0) = \frac{\binom{3}{1}\binom{7}{6}}{\binom{10}{7}} \frac{\binom{12}{0}\binom{8}{7}}{\binom{20}{7}} \frac{\binom{70}{0}\binom{30}{7}}{\binom{100}{7}}$$

und die anderen Wahrscheinlichkeiten können wir analog ausrechnen. Das ergibt

$$\mathbb{P}(X=1) \approx 9{,}12 \cdot 10^{-9}.$$

b.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=2) &= \mathbb{P}(X_1 = 2 \wedge X_2 = 0 \wedge X_3 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = 0 \wedge X_2 = 2 \wedge X_3 = 0) \\ &\quad + \mathbb{P}(X_1 = 0 \wedge X_2 = 0 \wedge X_3 = 2) + \mathbb{P}(X_1 = 1 \wedge X_2 = 1 \wedge X_3 = 0) \\ &\quad + \mathbb{P}(X_1 = 0 \wedge X_2 = 1 \wedge X_3 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 1 \wedge X_2 = 0 \wedge X_3 = 1) \\ &\approx 3{,}13 \cdot 10^{-7}.\end{aligned}$$

c. $\mathbb{P}(X = 21) = 0$, da sich in Urne 1 nur 3 rote Kugeln befinden.

Aufgabe 10.2
Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable mit $X(\Omega) = \{3;\ 8\}$ und $\mathbb{P}(X = 3) = p$. Bestimmen Sie alle Werte von p, für die

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) \;=\; \frac{1}{\mathbb{E}(X)}$$

gilt.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{\mathbb{E}(X)} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{p}{3} + \frac{(1-p)}{8} = \frac{1}{3p + 8(1-p)} \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{5p+3}{24} = \frac{1}{8-5p} \\
&\Longleftrightarrow \quad 24 + 25p - 25p^2 = 24 \\
&\Longleftrightarrow \quad p^2 - p = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad p \in \{0, 1\}\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 10.3
Die zwölf Seiten eines fairen Dodekaederwürfels sind mit den Zahlen $1, \dots, 12$ beschriftet. Wir würfeln dreimal hintereinander mit dem Würfel und beschreiben für $i \in \{1, 2, 3\}$ das Ergebnis des i-ten Wurfs mit der Zufallsvariablen X_i.

a. Bestimmen Sie Erwartungswerte und Varianz für X_i, $i \in \{1, 2, 3\}$.
b. Berechnen Sie $V(X_1X_2 + X_2)$ und $V(X_1X_2) + V(X_2)$.

Lösung: Mit $\Omega := \{1, 2, \dots, 12\}$ ist

$$\begin{aligned}
X_i : \Omega^3 &\to \Omega \\
(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &\mapsto \omega_i
\end{aligned}$$

Für $\omega \in \Omega$ ist as Urbild $X_i^{-1}(\omega) = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega^3 : \omega_i = \omega\}$. Das bedeutet, es zählt nur das Ergebnis des i-ten Wurfs für die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses. Da der Wurf eines fairen Würfels gleichverteilt ist, folgt $\mathbb{P}(X_i = \omega) = \frac{1}{12}$.

a.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_i) &= \sum_{k=1}^{12} k\,\mathbb{P}(X_i = k) = \frac{1}{12}\sum_{k=1}^{12} k = \frac{12 \cdot 13}{12 \cdot 2} = \frac{13}{2} \\
\mathbb{E}(X_i^2) &= \sum_{k=1}^{12} k^2\,\mathbb{P}(X_i = k) = \frac{1}{12}\sum_{k=1}^{12} k^2 = \frac{325}{6} \\
V(X_i) &= \mathbb{E}(X_i^2) - \mathbb{E}(X_i)^2 = \frac{143}{12} \approx 11{,}917
\end{aligned}$$

b.

$$
\begin{aligned}
V(X_1X_2+X_2) &\overset{\text{Def.}}{=} \mathbb{E}((X_1X_2+X_2)^2) - (\mathbb{E}(X_1X_2+X_2))^2 \\
&= \mathbb{E}((X_1X_2)^2 + 2X_1X_2^2 + X_2^2) - (\mathbb{E}(X_1X_2+X_2))^2 \\
&\overset{\text{linear}}{=} \mathbb{E}((X_1X_2)^2) + 2\mathbb{E}(X_1X_2^2) + \mathbb{E}(X_2^2) - (\mathbb{E}(X_1X_2) + \mathbb{E}(X_2))^2 \\
&\overset{\text{unab.}}{=} \mathbb{E}(X_1^2)\mathbb{E}(X_2^2) + 2\mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2^2) + \mathbb{E}(X_2^2) - (\mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2) + \mathbb{E}(X_2))^2 \\
&= \left(\frac{325}{6}\right)^2 + 13\cdot\left(\frac{325}{6}\right) + \left(\frac{325}{6}\right) - \left(\left(\frac{13}{2}\right)^2 + \left(\frac{13}{2}\right)\right)^2 \\
&\approx 1315,799
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V(X_1X_2) + V(X_2) &= \mathbb{E}(X_1^2X_2^2) - (\mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2))^2 + V(X_2) \\
&= \mathbb{E}(X_1^2)\mathbb{E}(X_2^2) - \mathbb{E}(X_1)^2\mathbb{E}(X_2)^2 + V(X_2) \\
&= \left(\frac{325}{6}\right)^2 - \left(\frac{13}{2}\right)^4 + \frac{119}{12} \\
&\approx 1160,882
\end{aligned}
$$

Aufgabe 10.4
Wir schauen uns Aufgabe **4.4** nochmal an und nehmen wieder der Einfachkeit halber an, daß jedes Jahr 365 Tage hat.

a. Sie sind auf einer Party mit 30 Leuten (deren Geburtstage zufällig verteilt sind) und wetten 20 Euro, daß es mindestens zwei mit demselben Geburtstag gibt. Eine Ihrer Freundinnen wettet dagegen. Wieviel Euros sollte sie setzen, daß die Wette fair ist?
b. Was sollte sie setzen, wenn auf der Party 40 Leute sind?

Lösung:
Mit Aufgabe **4.4** berechnen wir die Wahrscheinlichkeit $p = p(n)$, dass es bei n Gästen mindestens zwei mit demselben Geburtstag gibt. Wir definieren $\Omega := \{G, V\}$ mit $\mathbb{P}(G) = p$, $\mathbb{P}(V) = 1 - p$ und die Zufallsvariable X über $X(G) = 1, X(V) = -1$.

Wir bezeichnen mit x ihren Einsatz. Falls Sie gewinnen, ist die Höhe des Gewinns gleich x. Falls Ihre Freundin gewinnt, verlieren Sie 20 Euro. Wir definieren also

$$
g_x(X) := \begin{cases} x \cdot X & \text{falls } X = 1, \\ 20X & \text{falls } X = -1. \end{cases}
$$

Die Wette ist fair, falls der erwartete Gewinn null ist, d.h. wir wollen x so bestimmen, dass

$$
\mathbb{E}(g_x(X)) = x\,\mathbb{P}_X(1) - 20\,\mathbb{P}_X(-1) = xp - 20(1-p) = 0\,.
$$

a. Für $n = 30$ ist $p = 0,70632$ und

$$
\mathbb{E}(g_x(X)) = 0 \iff x \approx 8,32\,.
$$

b. Für $n = 40$ ist $p = 0,89123$ und

$$
\mathbb{E}(g_x(X)) = 0 \iff x \approx 2,44\,.
$$