Freie Universität Berlin

WAHRSCHEINLICHKEIT & STATISTIK
Wintersemester 2019/20

Prof. Matthias Beck
Hauke Sprink
Institut für Mathematik
AG Diskrete Geometrie
Arnimallee 2

11. Übung (Lösungen)

Aufgabe 11.1

Die *Gamma-Funktion* wird durch

$$\begin{aligned}\Gamma : \mathbb{R}_{>0} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt\end{aligned}$$

definiert.[1] (Sie können annehmen, daß das Integral konvergiert.)

a. Zeigen Sie, daß $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ gilt.

b. Berechnen Sie $\Gamma(1)$ und beweisen Sie, daß $\Gamma(n) = (n-1)!$ für positive ganzen Zahlen n gilt.

c. Man kann via **a.** die Gamma-Funktion auf den Definitionsbereich $\mathbb{R}$ analytisch fortsetzen[2] und dann beweisen, daß für $x \notin \mathbb{Z}$

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) \;=\; \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

gilt. Folgern Sie hieraus die Werte $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ und $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Lösung:

a.

$$\Gamma(x+1) \;=\; \int_0^\infty t^x e^{-t}dt \;=\; -t^x e^{-t}\Big|_{t=0}^{\infty} - \int_0^\infty -x\,t^{x-1}e^{-t}dt \;=\; x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \;=\; x\,\Gamma(x)\,.$$

b.

$$\Gamma(1) \;=\; \int_0^\infty e^{-t}dt \;=\; -e^t\Big|_0^\infty \;=\; 1\,.$$

$\Gamma(n) = (n-1)!$ kann man nun per Induktion mit **a.** zeigen.

c. $\Gamma(\frac{1}{2})^2 = \Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(1-\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{2})} = \pi \implies \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.
(Weil der Integrand positiv ist, kommt $-\sqrt{\pi}$ als Lösung nicht in Frage.)
$\Gamma(\frac{3}{2}) = \Gamma(\frac{1}{2}+1) \overset{\textbf{a.}}{=} \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Aufgabe 11.2

Die Geschwindigkeit eines Moleküls in einem homogenen Gas im Gleichgewichtszustand ist

[1] Mit ein bisschen komplexer Analysis definiert man die Gamma-Funktion am besten für ein komplexes Argument, dessen reeller Anteil dann als positiv vorausgesetzt wird, damit das Integral konvergiert.

[2] Auch dies ist wieder im Komplexen einfacher: Man kann Γ auf ganz $\mathbb{C}$ analytisch fortsetzen.

eine Zufallsvariable, deren Dichtefunktion durch

$$f(x) = \begin{cases} a\,x^2 e^{-bx^2} & \text{falls } x \geq 0, \\ 0 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

gegeben ist, wobei b von der Molekülmasse und der Temperatur des Gases abhängt.[3] Bestimmen Sie a in Abhängigkeit von b.

Lösung: Im Integral unten werden wir die Substitution $t = bx^2$ machen.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \;&=\; a\int_0^{\infty} x^2 e^{-bx^2} dx \;=\; a\int_0^{\infty} \frac{t}{b}\, e^{-t}\,\frac{dt}{2\sqrt{bt}} \\
&=\; \frac{a}{2b^{\frac{3}{2}}}\int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}}\, e^{-t} dt \;=\; \frac{a}{2b^{\frac{3}{2}}}\Gamma(\tfrac{3}{2}) \;=\; \frac{\sqrt{\pi}\,a}{4b^{\frac{3}{2}}} \\
&=\; 1 \iff a = \frac{4b^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}}\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 11.3

Die Lebensdauer einer Elektronenröhre (gemessen in Stunden) ist eine Zufallsvariable mit der Dichtefunktion

$$\begin{aligned} f : [0;\infty) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x\,e^{-x}. \end{aligned}$$

Berechnen Sie die Lebenserwartung dieser Elektronenröhre.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) \;&=\; \int_0^{\infty} x\,f(x)dx \;=\; \int_0^{\infty} x^2\, e^{-x}dx \;=\; \underbrace{-x^2\, e^{-x}\Big|_0^{\infty}}_{=0} + \int_0^{\infty} 2x\, e^{-x}dx \\
&=\; 2\left(\underbrace{-x\, e^{-x}\Big|_0^{\infty}}_{=0} + \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-x}dx}_{=1}\right) \;=\; 2\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 11.4

Ein Bus pendelt zwischen den Städten A und B, die 100km voneinander entfernt liegen. Wir nehmen an, dass bei einem Busausfall die Entfernung vom Ort des Schadens zur Stadt A gleichmäßig über das Intervall $(0;100)$ verteilt ist.

Zur Zeit gibt es drei Vertragswerkstätten: je eine in A und B sowie eine 50km von A entfernt. Bei der Neuausschreibung der Werkstattsverträge wird den Landrat empfohlen, dass je eine Werkstatt 25, 50 bzw. 75km entfernt von A entfernt sein sollten. Stimmen Sie zu? Warum?

Lösung: Sei X die zurückgelegte Strecke bei einem Busunfall und $g(X)$ die Entfernung zur nächstgelegenen Werkstatt. Wir berechnen die erwartete Enfernung $\mathbb{E}(g(X))$ für beide Fälle. Nachdem X gleichverteilt ist, ist die Dichtefunktion gegeben durch $f(x) = \frac{1}{|B-A|} = \frac{1}{100}$.

[3]Man berechnet $b = \frac{m}{2kT}$, wobei k die Boltzmann-Konstante, T die absolute Temperatur und m die Molekülmasse bezeichen.

Variante 1:

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{falls } 0 \leq x \leq 25, \\ 50 - x & \text{falls } 25 \leq x \leq 50, \\ x - 50 & \text{falls } 50 \leq x \leq 75, \\ 100 - x & \text{falls } 75 \leq x \leq 100. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(g(X)) &= \int_0^{100} g(x) f(x)\, dx \\
&= \int_0^{25} x\, f(x)\, dx + \int_{25}^{50} (50 - x)\, f(x)\, dx + \int_{50}^{75} (x - 50)\, f(x)\, dx + \int_{75}^{100} (100 - x) f(x)\, dx \\
&= \frac{1}{100} \left(\int_0^{25} x\, dx + \int_{25}^{50} (50 - x)\, dx + \int_{50}^{75} (x - 50)\, dx + \int_{75}^{100} (100 - x)\, dx \right) \\
&= \frac{1}{100} \left(\int_0^{25} x\, dx - \int_{25}^{0} x\, dx + \int_0^{25} x\, dx - \int_{25}^{0} x\, dx \right) \\
&= \frac{4}{100} \left(\int_0^{25} x\, dx \right) \\
&= 12,5\,.
\end{aligned}$$

Variante 2:

$$g(x) = \begin{cases} 25 - x & \text{falls } 0 \leq x \leq 25, \\ x - 25 & \text{falls } 25 \leq x \leq 37,5, \\ 50 - x & \text{falls } 37,5 \leq x \leq 50, \\ x - 50 & \text{falls } 50 \leq x \leq 62,5, \\ 75 - x & \text{falls } 62,5 \leq x \leq 75, \\ x - 75 & \text{falls } 75 \leq x \leq 100. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(g(X)) &= \frac{1}{100} \left(\int_0^{25} (25 - x)\, dx + \int_{25}^{37,5} (x - 25)\, dx + \cdots + \int_{75}^{100} (x - 75)\, dx \right) \\
&= \frac{1}{100} \left(\int_0^{25} x\, dx + \int_0^{12,5} x\, dx - \int_{12,5}^{0} x\, dx + \int_0^{12,5} x\, dx - \int_{12,5}^{0} x\, dx + \int_0^{25} x\, dx \right) \\
&= \frac{1}{100} \left(2 \int_0^{25} x\, dx + 4 \int_0^{12,5} x\, dx \right) \\
&= \frac{3}{100} \int_0^{25} x\, dx \\
&= 9,375\,.
\end{aligned}$$