Freie Universität Berlin

Prof. Matthias Beck
Hauke Sprink
Institut für Mathematik
AG Diskrete Geometrie
Arnimallee 2

WAHRSCHEINLICHKEIT & STATISTIK
Wintersemester 2019/20

12. Übung (Lösungen)

Aufgabe 12.1
Angenommen, die Zufallsvariable X ist normalverteilt mit den Parametern μ und σ, berechnen Sie Erwartungswert und Streuung der Zufallsvariablen $aX + b$.

Lösung: X ist normalverteilt mit Dichtefunktion $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$. Mit der Substitution $\frac{x-\mu}{\sigma} = t$ berechnen wir

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma t + \mu)\, e^{-\frac{1}{2}t^2} \sigma\, dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\sigma \int_{-\infty}^{\infty} t\, e^{-\frac{1}{2}t^2} + \mu \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} \right) = \mu\,.\end{aligned}$$

Nachdem der Erwartungswert linear ist, folgern wir $\mathbb{E}(aX + b) = a\mu + b$.

Mit derselben Substitution $\frac{x-\mu}{\sigma} = t$ berechnen wir

$$\begin{aligned}V(X) &= \mathbb{E}\left((X-\mu)^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\, dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma t)^2\, e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-t)\left(-t\, e^{-\frac{1}{2}t^2}\right) dt \\ &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left(-t\, e^{-\frac{1}{2}t^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \right) = \sigma^2.\end{aligned}$$

Daraus folgern wir $V(aX + b) = (a\sigma)^2$.

Aufgabe 12.2
Die jährliche Niederschlagsmenge (in cm) in einer bestimmten Region scheint gemäß einer Normalverteilung mit $\mu = 140$ und $\sigma = 4$ verteilt zu sein. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ab diesem Jahr mehr als 10 Jahre gewartet werden muss, bis ein Jahr mit einer jährlichen Regenmenge von mehr als 150 cm erreicht wird? (Welche Annahmen machen Sie?)

Lösung: X ist normalverteilt mit Parametern μ und σ, d.h. $Y := \frac{X-\mu}{\sigma}$ ist standardnormalverteilt.

$$X < 150 \iff \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{150-\mu}{\sigma} \iff Y < 2,5\,.$$

Damit ist $\mathbb{P}(X < 150) = \mathbb{P}(Y < 2,5) \approx 0,99379$. Wir nehmen an, dass die Regenmenge in einem Jahr unabhängig von der Regenmenge aller anderen Jahre ist. Das heißt, die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist $0,99379^{10} \approx 0,9396$.

Aufgabe 12.3
Wir betrachten 1000 unabhängige Würfe eines faires Würfels.

a. Approximieren Sie die Wahrscheinlichkeit, dass „6“ zwischen 150 und 200 Mal erscheint.
b. Angenommen „6“ erscheint genau 200 Mal. Bestimmen Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass „5“ weniger als 150 Mal erscheint.

Lösung: Sei X binomialverteilt mit Parametern n, p. Dann ist

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) \; = \; \sum_{a}^{b} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \; \approx \; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x(a-\frac{1}{2})}^{x(b+\frac{1}{2})} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

mit $x(z) := \frac{z-np}{\sqrt{np(1-p)}}$.

a. Hier ist $a = 150$, $b = 200$, $n = 1000$, $p = \frac{1}{6}$, $np = \frac{500}{3}$, $np(1-p) = \frac{1250}{9}$, und damit

$$x(a - \tfrac{1}{2}) = \frac{149,5 - \frac{500}{3}}{\sqrt{\frac{1250}{9}}} \approx -1,46 \qquad \text{und} \qquad x(b + \tfrac{1}{2}) = \frac{200,5 - \frac{500}{3}}{\sqrt{\frac{1250}{9}}} \approx 2,87\,.$$

Somit ist

$$\mathbb{P}(150 \leq X \leq 200) \; \approx \; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1,46}^{2,87} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \; \approx \; 0,9258\,.$$

b. Jetzt ist $a = 0$, $b = 149$, $n = 800$, $p = \frac{1}{5}$, $np = 160$, $np(1-p) = 128$,

$$x(b + \tfrac{1}{2}) = \frac{149,5 - 160}{\sqrt{128}} \approx -0,93 \qquad \text{und} \qquad x(a - \tfrac{1}{2}) = \frac{-0,5 - 160}{\sqrt{128}} \approx -14,19$$

und damit

$$\mathbb{P}(X < 150) \; \approx \; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-14,19}^{-0,93} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \; \approx \; 0,1762\,.$$

Aufgabe 12.4
Die Reparaturzeit (in Stunden) einer Maschine ist eine exponentiell verteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert 2 Stunden.

a. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Reparaturzeit zwei Stunden überschreitet?
b. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Reparatur, die bereits neun Stunden dauert, mindestens zehn Stunden benötigt?

Lösung:

a. Mit $\mathbb{E}(X) = 2 = \frac{1}{\lambda}$ benutzen wir die Dichtefunktion $f(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$. Damit ist

$$\mathbb{P}(X \geq 2) \; = \; \frac{1}{2} \int_{2}^{\infty} e^{-\frac{x}{2}}\, dx \; = \; -e^{-\frac{x}{2}} \Big|_{2}^{\infty} \; = \; e^{-1} \; \approx \; 0,3679\,.$$

b. Wegen der Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung ist

$$\mathbb{P}(X \geq 10 \,|\, X \geq 9) \; = \; \mathbb{P}(X \geq 1) \; = \; \frac{1}{2} \int_{1}^{\infty} e^{-\frac{x}{2}}\, dx \; = \; e^{-\frac{1}{2}} \; \approx \; 0,6065\,.$$