Freie Universität Berlin

Prof. Matthias Beck
Hauke Sprink
Institut für Mathematik
AG Diskrete Geometrie
Arnimallee 2

WAHRSCHEINLICHKEIT & STATISTIK
Wintersemester 2019/20

13. Übung (Lösungen)

Aufgabe 13.1
Eine Feuerwache muss an einer Straße der Länge A gebaut werden. Wo sollte sich die Feuerwache befinden, um die durchschnittliche Entfernung der Feuerwache zu minimieren?

a. Angenommen die Straße ist endlich lange, d.h. $[0, A]$, und die Feuer treten gleichverteilt über das Intervall $[0, A]$ auf.
b. Angenommen die Straße ist unendlich lang, d.h. von 0 bis $+\infty$, und die Feuer sind exponentialverteilt über das Intervall $[0, \infty]$.

Lösung: Wir bezeichnen mit F die Position der Feuerwache und mit g die Funktion die den Abstand vom Ort des Feuers x zur Feuerwache misst, d.h.

$$g(x) = \begin{cases} F - x & \text{falls } 0 \le x \le F, \\ x - F & \text{falls } F \le x \le A. \end{cases}$$

Wir berechnen nun den Erwartungswert für diese Entfernung und betrachten ihn als eine Funktion $h(F)$, d.h. wir setzten die erste Ableitung h' gleich 0. Ist zusätzlich die zweite Ableitung $h''(F) > 0$ handelt es sich um ein Minimum.

a. Die Dichtefunktion ist $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{A} & \text{falls } x \in [0, A], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(g(X)) &= \int_{\mathbb{R}} g(x)\, f(x)\, dx = \frac{1}{A}\left(\int_0^F F - x\, dx + \int_F^A x - F\, dx\right) \\ &= \frac{A}{2} - F + \frac{F^2}{A} =: h(F) \end{aligned}$$

$$h'(F) = \frac{2F}{A} - 1 = 0 \iff F = \frac{A}{2} \qquad \text{und} \qquad h''\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{2}{A} > 0$$

Die Feuerwache sollte genau in der Mitte der Straße gebaut werden.

b. Jetzt ist die Dichtefunktion $f(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x} & \text{falls } x \geq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(g(X)) &= \int_{\mathbb{R}} g(x)\, f(x)\, dx \\
&= \int_0^F (F-x)\lambda\, e^{-\lambda x}\, dx + \int_F^\infty (x-F)\lambda\, e^{-\lambda x}\, dx \\
&= F\left(\int_0^F \lambda\, e^{-\lambda x}\, dx - \int_F^\infty \lambda\, e^{-\lambda x} dx\right) - \int_0^F x\,\lambda\, e^{-\lambda x}\, dx + \int_F^\infty x\,\lambda\, e^{-\lambda x}\, dx \\
&= F\left(-e^{-\lambda x}\Big|_0^F + e^{-\lambda x}\Big|_F^\infty\right) + xe^{-\lambda x}\Big|_0^F - \underbrace{\int_0^F e^{-\lambda x}\, dx}_{-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\big|_0^F} - xe^{-\lambda x}\Big|_F^\infty + \underbrace{\int_F^\infty e^{-\lambda x}\, dx}_{-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\big|_F^\infty} \\
&= F\left(-e^{-\lambda F} + 1 - e^{-\lambda F}\right) + Fe^{-\lambda F} + \frac{e^{-\lambda F}}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} + Fe^{-\lambda F} + \frac{e^{-\lambda F}}{\lambda} \\
&= F + \frac{1}{\lambda}\left(2\, e^{-\lambda F} - 1\right) \;=:\; h(F)
\end{aligned}$$

$$h'(F) = 1 - 2\, e^{-\lambda F} = 0 \iff F = \frac{\log(2)}{\lambda} \qquad \text{und} \qquad h''(F) = 2\lambda\, e^{-\lambda F} > 0$$

Aufgabe 13.2
In einer Kreisscheibe mit Radius 1 wird ein Punkt zufällig gewählt (mit Gleichverteilung auf der Fläche). Bestimmen Sie die Dichtefunktion der Verteilung seines Abstandes vom Mittelpunkt M des Kreises. Was ist die Wahrscheinlichkeit, bei Darts einen Bullseye zu werfen, wenn der Bullseye-Radius $\frac{1}{25}$ ist?

Lösung: Die Menge der Punkte mit gleichem Abstand zu M ist ein Kreis mit Radius $r \in [0,1]$. Der Umfang eines solchen Kreises ist eine lineare Funktion $f(r) = \alpha r$ und wir müssen nun α so bestimmen, dass f eine Dichtefunktion ist.

$$\int_0^1 f(x)\, dx \;=\; \int_0^1 \alpha x\, dx \;=\; \frac{\alpha}{2} \;=\; 1 \qquad \iff \qquad \alpha = 2\,.$$

Die Wahrscheinlichkeit, ein Bullseye zu werfen, ist damit

$$\int_0^{\frac{1}{25}} f(x)\, dx \;=\; \int_0^{\frac{1}{25}} 2x\, dx \;=\; x^2\Big|_0^{\frac{1}{25}} \;=\; \frac{1}{625}\,.$$

Aufgabe 13.3

a. Es sei $Y : \Omega \to [0;5]$ eine gleichverteilte Zufallsvariable. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden Wurzeln des Polynoms

$$p_Y(x) \;=\; 4\,x^2 + 4\,Y x + Y + 2$$

reell sind?

b. Wie verändert sich diese Wahrscheinlichkeit, wenn Y normalverteilt ist (mit $\mu = 0$ und $\sigma = 1$)?

Lösung: Zuerst bestimmen wir die beiden Nullstellen x_1, x_2:

$$4\,x^2 + 4\,Yx + Y + 2 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_{1,2} = -\frac{Y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{Y}{2}\right)^2 - \frac{Y+2}{4}}$$

Diese sind reell genau dann, wenn

$$\begin{aligned}\left(\frac{Y}{2}\right)^2 - \frac{Y+2}{4} \ge 0 \;&\Longleftrightarrow\; (Y - \tfrac{1}{2})^2 \ge \tfrac{9}{4} \\ &\Longleftrightarrow\; Y - \tfrac{1}{2} \ge \tfrac{3}{2} \;\text{ oder }\; Y - \tfrac{1}{2} \le -\tfrac{3}{2} \\ &\Longleftrightarrow\; Y \ge 2 \;\text{ oder }\; Y \le -1\,.\end{aligned}$$

a. Da Y gleichverteilt auf $[0,5]$ ist, lautet die Dichtefunktion $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{falls } x \in [0,5], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Damit ist die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden Wurzeln reell sind,

$$\mathbb{P}(Y \ge 2) \;=\; \int_2^5 f(x)\,dx \;=\; \int_2^5 \frac{1}{5}\,dx \;=\; 0{,}6\,.$$

b. Jetzt ist Y standardnormalverteilt, d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden Wurzeln reell sind, ist

$$\mathbb{P}(Y \le -1) + \mathbb{P}(Y \ge 2) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-1} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_2^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt \;=\; 0{,}18141\,.$$

Aufgabe 13.4

Sei X eine binomialverteilte Zufallsvariable mit Parametern n und p.

a. Zeigen Sie, daß für $p < a < 1$ gilt

$$\mathbb{P}(X \ge na) \;\le\; \frac{p(1-p)}{n(a-p)^2}\,.$$

b. Sei jetzt $p = \frac{1}{2}$ und $a = \frac{2}{3}$. Vergleichen Sie die Abschätzung in **a.** mit der Markow-Ungleichung, in Abhängigkeit von n.

Lösung:

a. Nachdem X binomialverteilt ist, haben wir $\mathbb{E}(X) = np$ und $V(X) = np(1-p)$. Damit folgt mit der Tschebyschev-Ungleichung

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \ge na) \;&=\; \mathbb{P}(X - np \ge na - np) \;\le\; \mathbb{P}(|X - np| \ge na - np) \\ &\le\; \frac{np(1-p)}{(na-np)^2} \;=\; \frac{p(1-p)}{n(a-p)^2}\,.\end{aligned}$$

b. Für $p = \frac{1}{2}$ und $a = \frac{2}{3}$ sagt die Abschätzung in **a.**

$$\mathbb{P}\left(X \ge \frac{2n}{3}\right) \;\le\; \frac{\frac{1}{4}}{\frac{n}{36}} \;=\; \frac{9}{n}$$

und die Markov-Ungleichung

$$\mathbb{P}\left(X \ge \frac{2n}{3}\right) \;\le\; \frac{np}{\frac{2n}{3}} \;=\; \frac{3}{4}\,.$$

Für $n > 12$ ist die erste Abschätzung also besser, für grosses n sogar viel besser.