Freie Universität Berlin

Prof. Matthias Beck
Hauke Sprink
Institut für Mathematik
AG Diskrete Geometrie
Arnimallee 2

Wahrscheinlichkeit & Statistik
Wintersemester 2019/20

14. Übung(Lösungen)

Aufgabe 14.1
Wir haben zwei Münzen und wissen, daß eine von beiden fair ist (Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ für Kopf) und die andere eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{3}{4}$ für Kopf hat. (Wir können die beiden Münzen nicht unterscheiden.) Wir wählen eine der beiden Münzen zufällig und werfen sie n mal.

a. Können wir über das Gesetz der großen Zahlen vorhersagen, wie oft bei großem n Kopf erscheinen wird?

b. Wie groß sollte n sein, daß wir mit 90% Sicherheit bestimmen können, welche Münze gewählt wurde?

Lösung:

a. Sei

$$X_j \;=\; \begin{cases} 1 & \text{falls der } j\text{te Wurf Kopf zeigt,} \\ 0 & \text{falls der } j\text{te Wurf Zahl zeigt.} \end{cases}$$

Dann ist $\overline{X} := \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$ binomialverteilt mit $p = \frac{1}{2}$ (im Fall der fairen Münze) bzw. $p = \frac{3}{4}$ (im anderen Fall). Das Gesetz der grossen Zahlen sagt nun

$$\mathbb{P}\left(\left|\overline{X} - p\right| \ge \varepsilon\right) \;\le\; \frac{p(1-p)}{n\,\varepsilon^2},$$

d.h. im Fall der fairen Münze

$$\mathbb{P}_{\text{fair}}\left(\left|\overline{X} - \frac{1}{2}\right| \ge \varepsilon\right) \;\le\; \frac{1}{4n\,\varepsilon^2}$$

und im anderen Fall

$$\mathbb{P}_{\text{unfair}}\left(\left|\overline{X} - \frac{3}{4}\right| \ge \varepsilon\right) \;\le\; \frac{3}{16n\,\varepsilon^2}$$

Hier können wir z.B. $\varepsilon = \frac{1}{8}$ ansetzen:

$$\mathbb{P}_{\text{fair}}\left(\left|\overline{X} - \frac{1}{2}\right| \ge \frac{1}{8}\right) \;\le\; \frac{16}{n} \qquad \text{und} \qquad \mathbb{P}_{\text{unfair}}\left(\left|\overline{X} - \frac{3}{4}\right| \ge \frac{1}{8}\right) \;\le\; \frac{12}{n}.$$

Damit kann man bei grossem n vorhersagen, welche Münze wahrscheinlich vorliegt.

b. Es gibt hier verschiedene Ansätze; wir beschreiben einen davon. Wir wählen n gross genug, dass

$$\max\left\{\frac{16}{n}, \frac{12}{n}\right\} \;=\; \frac{16}{n} \;\le\; 0,1$$

ist, d.h. $n \geq 160$. Dann ist

$$\mathbb{P}_{\text{fair}}\left(\left|\overline{X} - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{8}\right) \;\leq\; 0,1 \qquad \text{und} \qquad \mathbb{P}_{\text{unfair}}\left(\left|\overline{X} - \frac{3}{4}\right| \geq \frac{1}{8}\right) \;\leq\; 0,1$$

und wir können somit mit 90% Sicherheit bestimmen können, welche Münze gewählt wurde: Wenn die Stichprobe unter $\frac{5}{8}$ liegt, sagen wir die faire Münze voraus, wenn sie mehr als $\frac{5}{8}$ ist, sagen wir die andere Münze voraus.

Aufgabe 14.2
Es seien $X_1, X_2, \ldots, X_{25}$ unabhängige Zufallsvariablen, deren (identische) Dichtefunktion

$$f(x) \;=\; \begin{cases} \frac{1}{4}\,x^3 & \text{falls } 0 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß $\frac{1}{25}(X_1 + X_2 + \cdots + X_{25})$

a. grösser als 1,8 ist;
b. zwischen 1,5 und 1,6 liegt.

(*Tip:* Verwenden Sie den zentralen Grenzwertsatz.)

Lösung: Wir berechnen zunächst Erwartungswert und Streuung

$$\mu \;:=\; \mathbb{E}(X_i) \;=\; \int_0^2 \frac{1}{4}\,x^4\,dx \;=\; \frac{1}{20}\,x^5\Big|_0^2 \;=\; \frac{8}{5}$$

$$\sigma^2 \;:=\; V(X_i) \;=\; \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \;=\; \int_0^2 \frac{1}{4}\,x^5 - \frac{64}{25} \;=\; \frac{1}{24}\,x^6\Big|_0^2 - \frac{64}{25} \;=\; \frac{64}{600}\,.$$

Wie immer sei $\overline{X} := \frac{1}{25}\,(X_1 + X_2 + \cdots + X_{25})$.

a. Um den zentralen Grenzwertsatz zu verwenden, formen wir um:

$$\begin{aligned} & \overline{X} > 1,8 \\ \Longleftrightarrow\;\; & X_1 + X_2 + \cdots + X_{25} > 45 \\ \Longleftrightarrow\;\; & X_1 + X_2 + \cdots + X_{25} - 40 > 5 \\ \Longleftrightarrow\;\; & \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{25} - 40}{5\sigma} > \frac{5}{5\sigma} \\ \Longleftrightarrow\;\; & \frac{25\overline{X} - 40}{5\sigma} > \sigma^{-1}, \end{aligned}$$

das heißt, mit dem zentralen Grenzwertsatz

$$\mathbb{P}\,(X > 1,8) \;=\; \mathbb{P}\left(\frac{25\overline{X} - 25\mu}{5\sigma} \;>\; \sigma^{-1}\right) \;\approx\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sigma^{-1}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx \;\approx\; 0,0011\,.$$

b.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(1,5 \leq \overline{X} \leq 1,6) &= \mathbb{P}(\overline{X} \leq 1,6) - \mathbb{P}(\overline{X} \leq 1,5) \\
&= \mathbb{P}(25\overline{X} \leq 40) - \mathbb{P}(25\overline{X} \leq 37,5) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{25\overline{X} - 25\mu}{5\sigma} \leq \frac{40 - 25\mu}{5\sigma}\right) - \mathbb{P}\left(\frac{25\overline{X} - 25\mu}{5\sigma} \leq \frac{37,5 - 25\mu}{5\sigma}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{25\overline{X} - 25\mu}{5\sigma} \leq 0\right) - \mathbb{P}\left(\frac{25\overline{X} - 25\mu}{5\sigma} \leq -\frac{1}{2\sigma}\right) \\
&\approx 0,437\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 14.3
Sie haben 50 Gäste in Ihren Weinkeller eingeladen und schätzen ab, daß 30% ein Glas, 40% zwei Glas, 20% drei Glas und 10% vier Glas Wein trinken werden. Sie möchten 99% sicher sein, daß Ihr Vorrat, der für n Glas Wein herhält, für die Party ausreicht. Wie groß muß n sein?

Lösung: Wir bezeichnen mit X_i die Anzahl der Gläser, die "Gast i" trinkt. Dann ist die Gesamtmenge gegeben durch $X := X_1 + \cdots + X_{50}$. Wir berechenen

$$\mu := \mathbb{E}(X_i) = 0,3 \cdot 1 + 0,4 \cdot 2 + 0,2 \cdot 3 + 0,1 \cdot 4 = 2,1$$

$$\sigma := \sqrt{V(X_i)} = \sqrt{0,3 \cdot 1 + 0,4 \cdot 4 + 0,2 \cdot 9 + 0,1 \cdot 16 - 2,1^2} = \sqrt{0,89} \approx 0,9434$$

Wir wollen wissen, wie groß n sein muss, damit $\mathbb{P}(X \leq n) = \mathbb{P}(\frac{X-50\mu}{\sqrt{50}\sigma} \leq \frac{n-50\mu}{\sqrt{50}\sigma}) \geq 0,99$. Nach dem zentralen Grenzwertsatz ist für $a := \frac{n-50\mu}{\sqrt{50}\sigma}$

$$\mathbb{P}\left(\frac{X - 50\mu}{\sqrt{50}\sigma} \leq a\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{\frac{-x^2}{2}}\, dx\,.$$

Wir berechnen also

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \geq 0,99 &\iff a \geq 2,33 \\
&\iff n \geq 120,54 \\
&\implies n \geq 121\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 14.4
In Ihrer Firma arbeiten 20 Leute, und im Schnitt meldet sich ein Angestellter an 10 Tagen im Jahr krank, mit einer Standartabweichung von $\sigma = 2$. Angenommen, daß sich die Angestellten unabhängig voneinander krank melden, wie viele Krankheitstage sollte Ihre Firma im Budget einplanen, daß die Wahrscheinlichkeit, diese Anzahl zu überschreiten, unter 20% liegt?

Lösung: Wir haben $\mu = 10$, $\sigma = 2$ gegeben und schreiben wieder $X := X_1 + \cdots + X_{20}$ für die Summe der Krankheitstage aller Mitarbeiter. Wir bezeichnen mit T die Anzahl der Tage, die eingeplant werden müssen. Wir wollen wissen, wie groß T sein muss, damit

$$\mathbb{P}(X > T) < 0,2 \iff \mathbb{P}(X \leq T) > 0,8 \iff \mathbb{P}\left(\frac{X - 200}{\sqrt{80}} \leq \frac{T - 200}{\sqrt{80}}\right) > 0,8\,.$$

Nach dem zentralen Grenzwertsatz ist für $a := \frac{T-200}{\sqrt{80}}$

$$\mathbb{P}\left(\frac{X-200}{\sqrt{80}} \leq a\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{\frac{-x^2}{2}} dx \,.$$

Wir berechnen also

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx &> 0,8 \\ \iff a &> 0,85 \\ \iff T &> 207,6 \end{aligned}$$

Es sollten mindestens $T = 208$ Tage eingeplant werden.