Freie Universität Berlin
Erstgutachter: Prof. Matthias Beck
Zweitgutachter: Dr.Rer.Nat. Christian Haase

Ein stochastischer Ansatz zum Beweis der Reziprozität von Dedekindsummen

Bachelorarbeit

vorgelegt von: Jakob Becker
Matrikelnummer: 5207601
Abgabedatum: 21.10.2021

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit eigenständig und ohne fremde Hilfe geschrieben habe. Textpassagen, die ich aus anderen Quellen wörtlich oder sinngemäß übernommen habe, wurden kenntlich gemacht. Diese Arbeit wurde in dieser Form keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt.

Ort, Datum Unterschrift

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

„Die Zahlen sind freie Schöpfungen des menschlichen Geistes, sie dienen als Mittel, um die Verschiedenheit der Dinge leichter und schärfer aufzufassen. Durch den rein logischen Aufbau der Zahlen-Wissenschaft und durch das in ihr gewonnene stetige Zahlen-Reich sind wir erst in den Stand gesetzt, unsere Vorstellungen von Raum und Zeit genau zu untersuchen, indem wir dieselben auf dieses in unserem Geiste geschaffene Zahlenreich beziehen.“[1]

Mit diesen Worten beschrieb Richard Dedekind(1831-1916) einen der wesentlichen Kerngedanken der modernen Mathematik. Zahlen - allgemeiner die Objekte, die wir im mathematischen Alltag gebrauchen - ermöglichen es uns, Zusammenhänge aus der realen Welt zu abstrahieren, diese auf einer abstrakten Ebene zu untersuchen, daraus Schlüsse zu ziehen und diese wieder auf die reale Welt abzubilden.

Besonders interessant ist es, wenn sich komplexe Inhalte aus sehr einfachen Vorstellungen errichten lassen. So lohnt es sich anstelle der Untersuchung eines komplexen Zusammenhangs auf einer hohen Abstraktionsebene oft, passende, einfache Gedankenexperimente zu entwickeln und aus diesen die erzielte Aussage zu folgern.

Gerade im pädagogischen Kontext bildet sich daraus häufiger die Möglichkeit, während der Untersuchung die Eigenschaften des betrachteten Objektes genauer zu analysieren und damit zu verstehen. Im Kontrast zu formal sehr anspruchsvollen Beweisen können sich hier die Zusammenhänge aus der Struktur des Objektes selbst ergeben und machen es so Studierenden leichter, solchen Inhalten zu folgen und diese nachzuvollziehen.

Im Zusammenhang mit diesem Grundsatz beschäftigt sich diese Arbeit mit Dedekindsummen und Dedekind-Rademacher Summen.

Definition (Dedekindsumme)**.** *Für $a, b \in \mathbb{N}$ ist die Dedekindsumme definiert als*

$$s(a,b) = \sum_{k \bmod b} \left(\left(\frac{ka}{b}\right)\right)\left(\left(\frac{a}{b}\right)\right) \tag{1}$$

über die Sägezahnfunktion

$$\left(\left(\frac{n}{t}\right)\right) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \frac{n}{t} \in \mathbb{Z}\,, \\ \frac{n}{t} - \left\lfloor \frac{n}{t} \right\rfloor - \frac{1}{2} & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

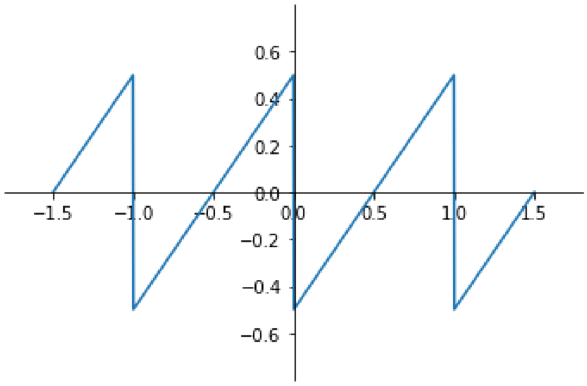

Abbildung 1: Sägezahnfunktion

Dedekindsummen und ihre Verallgemeinerungen sind in einigen Bereichen der Mathematik von Relevanz, dazu zählen Zahlentheorie und Topologie. (vgl. [2], Seite 161)

Eine der zentralen Eigenschaften der Dedekindsumme ist dabei die Reziprozität.

Satz (Reziprozität von Dedekindsummen)**.** *Für teilerfremde $a, b \in \mathbb{N}$ ist*

$$s(a,b) + s(b,a) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\left(\frac{a}{b} + \frac{1}{ab} + \frac{b}{a}\right). \tag{2}$$

Erstmals betrachtet wurden die Dedekindsummen von Richard Dedekind während seines Studiums der Dedekind μ-Funktion, einem Werkzeug für Berechnungen mit Modularformen in der Zahlentheorie. Die Reziprozität (2) folgerte er dabei aus einer der funktionalen Transformationsidentitäten für μ. (vgl. [2], Seite 160-161)

Nach dem Tod Dedekinds studierte Hans Rademacher(1892-1969) die Dedekindsummen in einer Reihe von Arbeiten weiter und entwickelte so unter anderem mehrere Beweise für die Reziprozität von Dedekindsummen. (vgl. [3], Seite 68-69)

Rademachers Arbeit weckte auch das Interesse in anderen MathematikerInnen an der Untersuchung dieses Gebiets. 1950 und 1952 generalisierte etwa Tom M. Apostol die Dedekindsumme über Bernoulli Polynome. (vgl. [3], Seite 69)

Zu einer der ersten Generalisierungen zählte dabei die Dedekind-Rademacher Summe durch Rademacher selbst. (vgl. [4],Seite 380)

Definition (Dedekind-Rademacher Summe)**.** *Für $a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$ und $c \in \mathbb{R}$ ist die* ***Dedekind-Rademacher Summe*** *definiert als*

$$r_c(a,b) = \sum_{k=1}^{b-1} \left(\left(\frac{ka+c}{b}\right)\right)\left(\left(\frac{k}{b}\right)\right). \tag{3}$$

Im Gegensatz zu anderen Generalisierungen wie den von Tom M. Apostol ist diese ähnlich simpel definiert wie die ursprüngliche Dedekindsumme. Sie unterscheidet sich nur um der Parameter c. Ähnlich ist es bei der Reziprozität dieser Summe.

Satz (Reziprozität Dedekind-Rademacher Summe)**.**
Für teilerfremde $n, t \in \mathbb{Z}_{>0}$ mit $n < t$, $m \in [0, 1)$ und $m \neq \frac{k}{t}$ für $k \in \{1, \ldots, t-1\}$ ist

$$r_{-mt}(n, t) + r_{mt}(t, n) = \frac{1}{12}\left(\frac{t}{n} + \frac{1}{nt} + \frac{n}{t}\right) - \frac{1}{4} + \frac{\lfloor mt \rfloor + \lfloor mt \rfloor^2}{2nt} - \frac{1}{2}\left\lfloor \frac{mt}{n} \right\rfloor . \tag{4}$$

Bemerkung. *Diese Reziprozität ist eingeschränkt auf $m \neq \frac{k}{t}$ für $k \in \{1, \ldots, t-1\}$ und bildet damit nicht die gesamte Gleichung für allgemeine $m \in [0, 1)$ ab. Mehr dazu im zweiten Teil der Arbeit.*

Aus diesem Grund liegt die Ergründung einer solchen Eigenschaft mit Mitteln nahe, die in einer Vorlesung für Studierende ein besonders anschauliches und nachvollziehbares Vorgehen ermöglichen. Diese Arbeit beschäftigt sich deshalb mit einem Ansatz zum Beweis von (2) über ein simples Gedankenexperiment aus einer Arbeit von Karl Dilcher und Kurt Gistmair ([5]) und arbeitetet diesen neu auf. Des Weiteren soll dieser Ansatz auch auf die Verallgemeinerung Rademachers (3) angewendet und so für die Reziprozität (4) gefolgert werden.

Dabei wird zuerst ein Zufallsexperiment mit einer Verteilung definiert, bei dem für ganze Zahlen n und t größer Null $n-1$ Elemente t Boxen zugeordnet werden. Es werden dann zwei Arten untersucht, über die das zweite Moment für die Verteilung berechnet werden kann und diese gleichgesetzt. Daraus ergibt sich eine Reziprozität für eine "modifizierte Dedekindsumme". Letztlich bleibt es zu zeigen, wie die modifizierte mit der eigentlichen Dedekindsumme zusammenhängt und wie (2) daraus folgt.

Im zweiten Teil der Arbeit wird dieser Ansatz dann auf (3) angewendet und damit die Reziprozität der Dedekind-Rademacher Summe (4) hergeleitet.

2 Beweis der Reziprozität von Dedekindsummen

2.1 Vorgehen

Zum Beweis der Reziprozität von Dedekindsummen lohnt es sich, ein Modell einer Gleichverteilung her zunehmen. In diesem Modell werden wir $n-1$ Objekte in t Boxen einsortieren und beobachten, wie sich Eigenschaften des Modells zu einer modifizierten Dedekindsumme und einer Reziprozität dieser ableiten lassen. Letztlich bleibt es, den Zusammenhang zwischen modifizierter und normaler Dedekindsumme zu folgern, um die gewünschte Reziprozität zu erhalten.

2.2 Das Modell

2.2.1 Einführung

Beginnen wir damit, unser Modell zu definieren. Seien $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ und $t \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Stellen wir uns vor, wir wollen die Zahlen $1, \dots, n-1$ in gleichlange Teilintervalle von $[0, n)$ der Länge $\frac{n}{t}$ einsortieren, sodass wir zum Beispiel für $n = 5$ und $t = 3$ folgende Vorstellung erhielten:

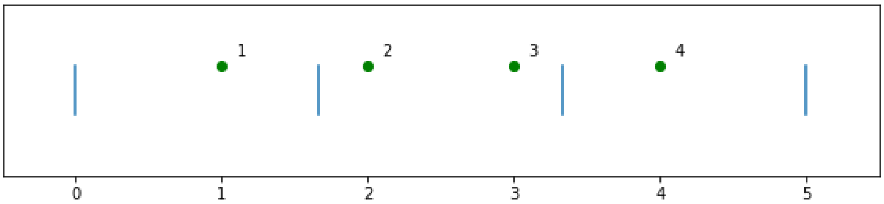

Abbildung 2: Beispiel für $n = 5$ und $t = 3$

Im ersten Teilintervall befindet sich hier das Element 1, im zweiten Element 2 und 3 und im dritten Element 4. Genauer definieren wir:

Definition (Teilintervall I_j)**.** *Wir unterteilen das Intervall* $[0, n)$ *in* t *Teilintervalle der Form*

$$I_j = \left[j\frac{n}{t}, (j+1)\frac{n}{t}\right), \quad j = 0, \dots, t-1\,. \tag{5}$$

Nach unserer Vorstellung soll dann eine Zahl $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ genau dann einem Teilintervall I_j zugeordnet werden, wenn

$$j\frac{n}{t} \leq k < (j+1)\frac{n}{t}\,.$$

2.2.2 Zufallsexperiment

Aus dieser Vorstellung heraus können wir ein Zufallsexperiment definieren, um dafür Erwartungswert und Varianz zu betrachten. Aus diesen leiten wir später die modifizierte Dedekindsumme her.

Definition (Zufallsexperiment)**.** *Auf dem Zufallsraum*

$$\Omega = \{1, \dots, n-1\}$$

definieren wir mit der Gleichverteilung

$$\mathcal{P}(\{k\}) = \frac{1}{n-1} \qquad \text{für alle } k \in \Omega$$

und der Zufallsvariable

$$f : \Omega \to \{0, \dots, t-1\}$$

ein Zufallsexperiment.

Dabei wollen wir jede Zahl $k \in \Omega$ einer Box bzw. einem Intervall zuordnen. Dafür bilde f jedes k genau dann auf $j \in \{0, \dots, t-1\}$ ab, wenn k im Intervall I_j liegt, also

$$j\frac{n}{t} \leq k < (j+1)\frac{n}{t}$$

ist. Weil die Intervalle disjunkt sind, ist diese Abbildung damit wohldefiniert.

2.3 Modifizierte Dedekindsumme

Über diese Definition können wir nun Erwartungswert und Varianz der Verteilung der Zahlen auf die Intervalle bestimmen. Wir werden dann beobachten können, dass durch weitere Überlegungen diese zu einer modifizierten Form der Dedekindsumme abgeleitet werden können.

2.3.1 Erwartungswert und Varianz

Für unsere Verteilung haben wir den Erwartungswert

$$d = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} f(k) \tag{6}$$

und damit die Varianz

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}(f(k)-d)^2.$$

Wir wollen nun annehmen, dass $t|n-1$, also nach Definition von (5) den Fall betrachten, bei dem in jeder der von uns definierten Boxen gleich viele Elemente liegen und die Zufallsvariable damit gleichverteilt vorliegt.

Dies können wir nun benutzen, um (6) anders darzustellen:

Im allgemeinen Fall iterieren wir in der Summe (6) über alle $n-1$ Elemente und summieren die Indizes der Boxen, denen sie durch f zugeordnet werden, auf. Dabei wird der Index der j-ten Box für jedes Element in dieser Box genau einmal auftauchen. Da wir eine Gleichverteilung annehmen, wird der Index der j-ten Box genau $\frac{n-1}{t}$ mal zu finden sein.

Wir können deshalb statt über die $n-1$ Elemente, über die j Boxen iterieren und erhalten in diesem Fall den Erwartungswert als

$$d_0 := \frac{1}{n-1}\sum_{j=0}^{t-1} j \cdot \frac{n-1}{t}.$$

Bemerkung. *Wir werden im Folgenden Bezeichnungen mit* 0 *im Index wählen, wenn ein Zusammenhang zur Gleichverteilung relevant ist.*

Nach der Gaußschen Summenformel ist $\sum_{j=0}^{t-1} j = \frac{t\cdot(t-1)}{2}$ und damit erhalten wir

$$d_0 = \frac{1}{t}\sum_{j=0}^{t-1} j = \frac{t-1}{2}\,. \tag{7}$$

Für den Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$ einer Verteilung X ist die Varianz σ^2 definiert als $\mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^2)$. Nach der Linearität des Erwartungswertes folgt daraus der Verschiebungssatz der Varianz $\sigma^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.

Diesen werden wir im Folgenden als Werkzeug zur Herleitung einer Modifizierten Dedekindsumme verwenden.

2.4 Zweites Moment

Definition. *Das zweite Moment unserer Verteilung definieren wir uns als*

$$F := \mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} f(k)^2\,, \tag{8}$$

Dieses hängt nach dem Verschiebungssatz über $\sigma^2 = F - d^2$ mit der Varianz zusammen. Im Fall einer Gleichverteilung unserer Zufallsvariable erhalten wir nun für das zweite Moment wieder

$$F_0 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=0}^{t-1} j^2 \cdot \frac{n-1}{t}\,, \tag{9}$$

wenn wir über die Boxen statt die Elemente iterieren. Zusammen mit der Summenformel $\sum_{j=0}^{t-1} j^2 = \frac{t(t-1)(2t-1)}{6}$ bekommen wir damit

$$F_0 = \frac{(t-1)(2t-1)}{6}\,.$$

Um F und F_0 praktisch miteinander in Verbindung zu bringen, werden wir uns N_j als die Anzahl der Elemente in der j-ten Box und E_j als die Abweichung der Anzahl der Elemente in der j-ten Box vom Fall einer Gleichverteilung definieren, d.h.

$$E_j = \frac{n-1}{t} - N_j, \quad j = 0,\dots,t-1\,. \tag{10}$$

Iterieren wir nun für F über die Boxen, statt über die Elemente, so ergibt sich damit

$$F = \frac{1}{n-1} \sum_{j=0}^{t-1} j^2 \cdot N_j = \frac{1}{n-1} \sum_{j=0}^{t-1} j^2 \cdot \frac{n-1}{t} - \frac{1}{n-1} \sum_{j=0}^{t-1} j^2 E_j \,. \tag{11}$$

Definition (Modifizierte Dedekindsumme)**.** *Wir definieren die modifizierte Dedekindsumme als*

$$S(n,t) := \sum_{j=0}^{t-1} j^2 E_j \tag{12}$$

Mit (11) erhalten wir so den Zusammenhang zwischen F in (8), F_0 in (9) und der modifizierten Dedekindsumme $S(n,t)$ in (12) mit

$$F = F_0 - \frac{S(n,t)}{n-1} \,. \tag{13}$$

2.5 Reziprozität der modifizierten Dedekindsumme

Um nun eine Reziprozität zu schlussfolgern, kann es sich lohnen, bestimmte Größen auf zwei verschiedene Arten und Weisen auszuwerten. Dieses Prinzip werden wir im Folgenden auf $S(n,t)$ anwenden.

Dazu definieren wir uns

$$\langle k \rangle_n := k \bmod n \qquad \text{mit } \langle k \rangle_n \in \{0, \ldots, n-1\}.$$

Also ist $\langle k \rangle_n$ der kleinste, nicht negative Rest beim Teilen von k durch n und $\left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor$ und $\frac{k}{n}$ unterscheiden sich nur um $\frac{\langle k \rangle_n}{n}$. Damit folgt

$$\left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor = \frac{k - \langle k \rangle_n}{n} \,. \tag{14}$$

Wir werden von nun an für unser Modell annehmen, dass n und t teilerfremd sind. Bei der späteren Betrachtung von Summen wie $\sum_{j=0}^{t-1}\langle jn\rangle_t$ können wir dann nämlich anwenden, dass $\langle jn\rangle_t$ für $j = 0, \ldots, t-1$ alle ganzen Zahlen von 0 bis $t-1$ genau einmal durchläuft. Es ergibt sich daraus der praktische Zusammenhang über die Gaußsche Summenformel

$$\sum_{j=0}^{t-1}\langle jn\rangle_t = \sum_{j=0}^{t-1} j = \frac{(t-1)t}{2}\,.$$

Jetzt werden wir uns einen geschlossenen Ausdruck für N_j überlegen, um später damit die Reziprozität zu folgern.

Nach unserer Definition (10) zählt N_j die Anzahl der Elemente in der Box

$$I_j = \left[j\frac{n}{t}, (j+1)\frac{n}{t}\right) \qquad \text{für } j \in \{0, \ldots, t-1\}\,.$$

Weil $j \in \{0, \ldots, t-1\}$ und n und t nach unserer Annahme teilerfremd sind, gilt $j\frac{n}{t}, (j+1)\frac{n}{t} \notin \mathbb{N}$ mit Ausnahme von $j\frac{n}{t}$ für $j = 0$ und $(j+1)\frac{n}{t}$ für $j = t-1$.

Daraus ergibt sich, dass I_j die Elemente $\left\lfloor \frac{jn}{t}\right\rfloor + 1, \left\lfloor \frac{jn}{t}\right\rfloor + 2, \ldots, \left\lfloor (j+1)\frac{n}{t}\right\rfloor$ enthält. Um deren Anzahl N_j zu zählen, ziehen wir die kleinste natürliche Zahl, die in der Box enthalten ist, von der größten ab. Des Weiteren müssen wir für die eben genannten Ausnahmen noch die Anzahl anpassen. Im Falle $j = 0$ ist auch die Zahl 0 in der Box enthalten. Im Falle $j = t-1$ müssen wir die Anzahl um 1 verringern, weil dann $\left\lfloor (j+1)\frac{n}{t}\right\rfloor = (j+1)\frac{n}{t} = n \in \mathbb{N}$ nicht mehr im Intervall enthalten ist. Es ergibt sich uns der Ausdruck

$$N_j = \left\lfloor \frac{(j+1)n}{t} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{jn}{t} \right\rfloor - \delta_{j,t-1} + \delta_{j,0} \qquad \text{für } \delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{falls } j = k\,, \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases} \tag{15}$$

Mit (10) und (14) erhalten wir dann

$$\begin{aligned} E_j = \frac{n-1}{t} - N_j &= \frac{n-1}{t} - \left(\left\lfloor \frac{(j+1)n}{t} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{jn}{t} \right\rfloor - \delta_{j,t-1} + \delta_{j,0} \right) \\ &= \frac{n-1}{t} - \frac{(j+1)n - \langle (j+1)n\rangle_t}{t} + \frac{jn - \langle jn\rangle_t}{t} + \delta_{j,t-1} - \delta_{j,0} \\ &= \frac{-1 + \langle (j+1)n\rangle_t - \langle jn\rangle_t}{t} + \delta_{j,t-1} - \delta_{j,0}\,. \end{aligned}$$

Dies werden wir nun benutzen, um unserer modifizierte Dedekindsumme eine Form zu geben, mit der wir die Reziprozität beweisen können.

Für (12) folgt nämlich

$$\begin{aligned}
S(n,t) &= \sum_{j=0}^{t-1} j^2 E_j \\
&= \sum_{j=0}^{t-1} j^2 \left(\frac{-1 + \langle (j+1)n \rangle_t - \langle jn \rangle_t}{t} + \delta_{j,t-1} - \delta_{j,0} \right) \\
&= -\frac{1}{t} \sum_{j=0}^{t-1} j^2 + \frac{1}{t} \sum_{j=0}^{t-1} j^2 (\langle (j+1)n \rangle_t - \langle jn \rangle_t) + \sum_{j=0}^{t-1} j^2 (\delta_{j,t-1} - \delta_{j,0})
\end{aligned}$$

und mit der Summenformel $\sum_{j=0}^{t-1} j^2 = \frac{t(t-1)(2t-1)}{6}$ und der Definition von $\delta_{j,k}$ erhalten wir

$$S(n,t) = -\frac{(t-1)(2t-1)}{6} + \frac{1}{t} \sum_{j=0}^{t-1} j^2 (\langle (j+1)n \rangle_t - \langle jn \rangle_t) + (t-1)^2 .$$

Wir werden die Summe in der letzten Zeile genauer betrachten. Aufeinanderfolgende Summanden können hier nämlich zusammengefasst werden. Wir haben

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{t-1} j^2 (\langle (j+1)n \rangle_t - \langle jn \rangle_t) &= 1 \cdot (\langle 2n \rangle_t - \langle n \rangle_t) + 4 \cdot (\langle 3n \rangle_t - \langle 2n \rangle_t) + 9 \cdot (\langle 4n \rangle_t - \langle 3n \rangle_t) + \cdots \\
&= -\langle n \rangle_t + \langle 2n \rangle_t - 4\langle 2n \rangle_t + 4\langle 3n \rangle_t - 9\langle 3n \rangle_t + \cdots \\
&= \sum_{j=0}^{t-1} ((j-1)^2 - j^2) \langle jn \rangle_t
\end{aligned}$$

und mit $(j-1)^2 - j^2 = -2j + 1$ ergibt sich

$$\sum_{j=0}^{t-1} j^2 (\langle (j+1)n \rangle_t - \langle jn \rangle_t) = \sum_{j=0}^{t-1} (-2j+1) \langle jn \rangle_t .$$

Wir werden dieses Ergebnis nun in die Formel für $S(n,t)$ einsetzen. Außerdem wird uns unsere Annahme vom Anfang dieses Kapitels weiterhelfen. Weil n und t teilerfremd sind, gibt es für $k \in \{0, \ldots, t-1\}$ nämlich ein eindeutiges $j \in \{0, \ldots, t-1\}$, sodass $\langle jn \rangle_t = k$. Damit ist $\sum_{j=0}^{t-1} \langle jn \rangle_t$ nichts anderes als $\sum_{j=0}^{t-1} j$.

Es folgt

$$
\begin{aligned}
S(n,t) &= -\frac{(t-1)(2t-1)}{6} + \frac{1}{t}\sum_{j=0}^{t-1}(-2j+1)\langle jn\rangle_t + (t-1)^2 \\
&= -\frac{(t-1)(2t-1)}{6} - \frac{2}{t}\sum_{j=0}^{t-1} j\langle jn\rangle_t + \frac{1}{t}\sum_{j=0}^{t-1}\langle jn\rangle_t + (t-1)^2 \\
&= -\frac{(t-1)(2t-1)}{6} - \frac{2}{t}\sum_{j=0}^{t-1} j\langle jn\rangle_t + \frac{1}{t}\sum_{j=0}^{t-1} j + (t-1)^2 \\
&= -\frac{(t-1)(2t-1)}{6} - \frac{2}{t}\sum_{j=0}^{t-1} j\langle jn\rangle_t + \frac{1}{t}\frac{t(t-1)}{2} + (t-1)^2 \\
&= \frac{(t-1)(2t-1)}{3} - \frac{2}{t}\sum_{j=0}^{t-1} j\langle jn\rangle_t\,.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Für unsere zweite Auswertung werden wir einen expliziten Ausdruck für f finden. Nach unserer Definition (5) ist $f(k) = j$ genau dann, wenn f das Element a_k in die Box I_j einordnet, also wenn $j\frac{n}{t} \le k < (j+1)\frac{n}{t}$, und damit ist

$$
f(k) = j \quad\Longleftrightarrow\quad j \le \frac{kt}{n} < j+1\,.
$$

und folglich

$$
f(k) = \left\lfloor \frac{kt}{n} \right\rfloor = \frac{kt - \langle kt\rangle_n}{n}\,. \tag{17}
$$

Dieses Ergebnis können wir nun in die Definition (8) von F einsetzen und erhalten damit den Ausdruck

$$
\begin{aligned}
F &= \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} f(k)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{kt - \langle kt\rangle_n}{n}\right)^2 \\
&= \frac{1}{(n-1)n^2}\left(t^2\sum_{k=1}^{n-1}k^2 - 2t\sum_{k=1}^{n-1}k\langle kt\rangle_n + \sum_{k=1}^{n-1}\langle kt\rangle_n^2\right)\,.
\end{aligned}
$$

Wie schon in (16) sind die erste und letzte der 3 Summen gleich und es ergibt sich uns

$$\begin{aligned} F &= -\frac{2t}{(n-1)n^2}\sum_{k=1}^{n-1} k\langle kt\rangle_n + \frac{1}{(n-1)n^2}\left(t^2\sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \sum_{k=1}^{n-1}\langle kt\rangle_n^2\right) \\ &= -\frac{2t}{(n-1)n^2}\sum_{k=1}^{n-1} k\langle kt\rangle_n + \frac{(t^2+1)(2n-1)}{6n}\,. \end{aligned} \tag{18}$$

Vergleichen wir (16) und (18), so scheint es einen Zusammenhang zwischen beiden zu geben, wobei n und t vertauscht sind.

Tatsächlich können wir für

$$F = -\frac{2t}{(n-1)n^2}\sum_{k=1}^{n-1} k\langle kt\rangle_n + \frac{(t^2+1)(2n-1)}{6n}$$

und

$$S(t,n) = \frac{(n-1)(2n-1)}{3} - \frac{2}{n}\sum_{j=0}^{n-1} j\langle jt\rangle_n$$

beide Ausdrücke nach $\sum_{j=0}^{n-1} j\langle jt\rangle_n$ umstellen:

$$-\frac{(n-1)n^2}{2t}\left(F - \frac{(t^2+1)(2n-1)}{6n}\right) = \sum_{j=1}^{n-1} j\langle jt\rangle_n = \sum_{j=0}^{n-1} j\langle jt\rangle_n$$

$$-\frac{n}{2}\left(S(t,n) - \frac{(n-1)(2n-1)}{3}\right) = \sum_{j=0}^{n-1} j\langle jt\rangle_n\,.$$

Setzen wir nun gleich, erhalten wir

$$-\frac{n}{2}\left(S(t,n) - \frac{(n-1)(2n-1)}{3}\right) = -\frac{(n-1)n^2}{2t}\left(F - \frac{(t^2+1)(2n-1)}{6n}\right)$$

und damit

$$\begin{aligned}
F &= \frac{t}{(n-1)n}\left(S(t,n) - \frac{(n-1)(2n-1)}{3}\right) + \frac{(t^2+1)(2n-1)}{6n} \\
&= \frac{t}{(n-1)n}S(t,n) + \frac{(2n-1)(t-1)^2}{6n}\,.
\end{aligned}$$

Mit (9) und (13) haben wir

$$F = F_0 - \frac{S(n,t)}{n-1} = \frac{(t-1)(2t-1)}{6} - \frac{S(n,t)}{n-1}$$

und damit

$$\frac{t}{(n-1)n}S(t,n) + \frac{(2n-1)(t-1)^2}{6n} = \frac{(t-1)(2t-1)}{6} - \frac{S(n,t)}{n-1}\,.$$

Stellen wir nach $tS(t,n) + nS(n,t)$ um, erhalten wir den Zusammenhang

$$\begin{aligned}
t\,S(t,n) + n\,S(n,t) &= \frac{n(n-1)(t-1)(2t-1) - (n-1)(2n-1)(t-1)^2}{6} \\
&= \frac{(n-1)(t-1)(n+t-1)}{6}\,.
\end{aligned} \tag{19}$$

2.6 Zusammenhang zur Dedekindsumme

Es bleibt noch, den Zusammenhang zwischen der modifizierten Dedekindsumme $S(n,t)$ und der eigentlichen $s(n,t)$ zu zeigen. Der Ansatz dafür liegt in der Definition der Sägezahnfunktion

$$\left(\left(\frac{jn}{t}\right)\right) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \frac{jn}{t} \in \mathbb{Z}\,, \\ \frac{jn}{t} - \left\lfloor \frac{jn}{t} \right\rfloor - \frac{1}{2} & \text{sonst} \end{cases}$$

und mit dem Zusammenhang von $\lfloor . \rfloor$ und $\langle . \rangle_t$ in (14) ist damit

$$\left(\left(\frac{jn}{t}\right)\right) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \frac{jn}{t} \in \mathbb{Z}\,, \\ \frac{1}{t}\langle jn \rangle_t - \frac{1}{2} & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Setzen wir dies in die Definition der Dedekindsumme (1) ein, erhalten wir

$$\begin{aligned}
s(n,t) &= \sum_{j=1}^{t-1} \left(\left(\frac{jn}{t}\right)\right)\left(\left(\frac{j}{t}\right)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{t-1} \left(\frac{1}{t}\langle jn\rangle_t - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{t}\langle j\rangle_t - \frac{1}{2}\right) = \sum_{j=1}^{t-1} \left(\frac{1}{t}\langle jn\rangle_t - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{t}j - \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{t^2}\sum_{j=1}^{t-1} j\langle jn\rangle_t - \frac{1}{2t}\sum_{j=1}^{t-1}\langle jn\rangle_t - \frac{1}{2t}\sum_{j=1}^{t-1} j + \sum_{j=1}^{t-1}\frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{t^2}\sum_{j=1}^{t-1} j\langle jn\rangle_t - \frac{t-1}{4}\,,
\end{aligned}$$

analog für $s(t,n)$. Damit ergibt sich uns der Zusammenhang

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6}(t-1)(t-2) - 2t\, s(n,t) &= \frac{1}{6}(t-1)(t-2) - 2t\left(\frac{1}{t^2}\sum_{j=0}^{t-1} j\langle jn\rangle_t - \frac{t-1}{4}\right) \\
&= \frac{1}{6}(t-1)(t-2) - \frac{2}{t}\sum_{j=0}^{t-1} j\langle jn\rangle_t + \frac{2t^2-2t}{4} \\
&= \frac{(t-1)(2t-1)}{3} - \frac{2}{t}\sum_{j=0}^{t-1} j\langle jn\rangle_t \\
&= S(n,t)
\end{aligned} \tag{20}$$

und analog

$$\frac{1}{6}(n-1)(n-2) - 2n\, s(t,n) = S(t,n)\,.$$

Durch Einsetzen in (19) erhalten wir

$$\begin{aligned}
2nt\, s(t,n) + 2nt\, s(n,t) = {} & \frac{n^2t - 3nt + 2t}{6} + \frac{nt^2 - 3nt + 2n}{6} \\
& - \frac{n^2t - n^2 + nt^2 - 3nt + 2n - t^2 + 2t - 1}{6}
\end{aligned}$$

und damit folgt die Reziprozität der Dedekindsumme

$$s(t,n) + s(n,t) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\left(\frac{n}{t} + \frac{t}{n} + \frac{1}{nt}\right)\,.$$

3 Beweis der Reziprozität von Dedekind-Rademacher Summen

3.1 Einführung

Betrachten wir nun die Dedekind-Rademacher Summe (3).

Definition (Dedekind-Rademacher Summe). *Für $a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$ und $c \in \mathbb{R}$ ist die* ***Dedekind-Rademacher Summe*** *definiert als*

$$r_c(a,b) = \sum_{k=1}^{b-1} \left(\left(\frac{ka+c}{b}\right)\right) \left(\left(\frac{k}{b}\right)\right) .$$

Für diese Summe gibt es analog zur Dedekindsumme auch eine Reziprozität. Naheliegend ist es nun zu hinterfragen, ob der Ansatz aus dem ersten Teil dieser Arbeit auch auf die verallgemeinerte Form angewendet werden kann. Diese Frage werden wir uns nun widmen. Um eine Reziprozität für die Dedekind-Rademacher Summen herzuleiten, wollen wir nun den Ansatz aus dem ersten Teil in abgewandelter Form anwenden.

Erweitern wir deshalb unser Zufallsexperiment aus dem ersten Teil um die Vorstellung, dass wir die Elemente darin zusätzlich noch um einen zufällig gewählten Wert $m \in \mathbb{R}$ verschieben. Außerdem werden wir auch die 0 als Element mit hinzunehmen.

Durch die Definition der Dedekind-Rademacher Summe über die periodische Sägezahnfunktion mit Periode 1 und für unsere Beweisstrategie ergibt es Sinn, folglich anzunehmen, dass $0 \leq m < 1$ ist. Für die Reziprozität ist es außerdem erforderlich anzunehmen, dass $n < t$ und dass n und t teilerfremd sind.

Betrachten wir ein Beispiel mit diesen Erweiterungen für $n = 5$, $t = 6$ und $m = 0$, haben wir:

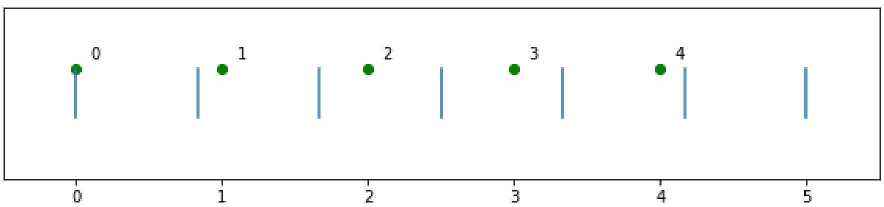

Abbildung 3: Beispiel für $n = 5$, $t = 6$ und $m = 0$

Nähmen wir nun eine Verschiebung um den Wert $m = 0.75$ an, erhielten wir folgende Vorstellung:

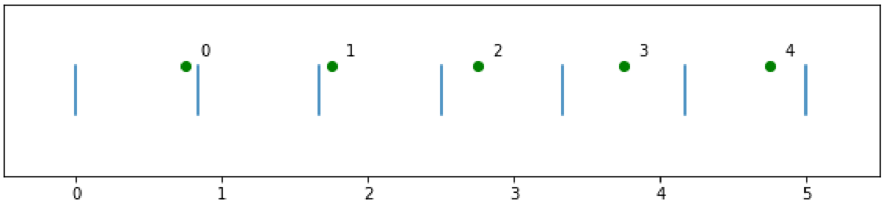

Abbildung 4: Beispiel für $n = 5$, $t = 6$ und $m = 0.75$

Aus diesem Gedankenexperiment heraus wollen wir nun zeigen:

Satz (Reziprozität Dedekind-Rademacher Summe)**.**
Für teilerfremde $n, t \in \mathbb{Z}_{>0}$ mit $n < t$, $m \in [0, 1)$ und $m \neq \frac{k}{t}$ für $k \in \{1, \dots, t-1\}$ ist

$$r_{-mt}(n,t) + r_{mt}(t,n) = \frac{1}{12}\left(\frac{t}{n} + \frac{1}{nt} + \frac{n}{t}\right) - \frac{1}{4} + \frac{\lfloor mt \rfloor + \lfloor mt \rfloor^2}{2nt} - \frac{1}{2}\left\lfloor \frac{mt}{n} \right\rfloor .$$

Bemerkung. *Diese Form der Reziprozität beschränkt sich auf mt, die nicht in den ganzen Zahlen enthalten sind. Eine Untersuchung auf diese Art sollte auch für allgemeine mt möglich sein, wird hier jedoch nicht ausgeführt und bleibt als Übung für den Leser.*

3.2 Vorgehen

Um die Reziprozität herzuleiten, werden wir wieder das zweite Moment auf zwei verschiedene Arten berechnen. Für

$$F = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(k)^2 . \tag{21}$$

wird, wenn N_j die Anzahl der Elemente in Box j ist, j^2 genau N_j mal in dieser Summe auftreten. Genauer ist

$$F = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(k)^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{t-1} j^2 N_j . \tag{22}$$

Diese beiden Summen stellen die Ansätze für die Herleitung der Reziprozität einer modifizierten Dedekind-Rademacher Summe dar. Haben wir diese erhalten, werden wir letztlich den Zusammenhang zwischen der modifizierten und der eigentlichen Summe zeigen. Daraus wird sich die Reziprozität der Dedekind-Rademacher Summen ergeben.

3.3 Erste Auswertung

Für die erste Auswertung betrachten wir (21) $F = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(k)^2$. Dafür werden wir einen expliziten Ausdruck für f unter Berücksichtigung einer Verschiebung um m finden, diesen in F einsetzen und den entstandenen Ausdruck auswerten.

Nach unserer Definition (5) ist $f(k) = j$ genau dann, wenn f das Element a_k in die Box I_j einordnet, also wenn $j\frac{n}{t} \leq k + m < (j+1)\frac{n}{t}$. Damit ist

$$f(k) = j \quad \Longleftrightarrow \quad j \leq \frac{(k+m)t}{n} < j+1\,.$$

und folglich

Satz (Abbildungsvorschrift für f)**.**

$$f(k) = \left\lfloor \frac{(k+m)t}{n} \right\rfloor = \frac{(k+m)t - \langle (k+m)t\rangle_n}{n}\,. \tag{23}$$

Dies können wir nun in die Definition (8) von F einsetzen und erhalten damit

$$\begin{aligned}
F &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(k)^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{(k+m)t - \langle (k+m)t\rangle_n}{n}\right)^2 \\
&= \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}(kt)^2 + 2kmt^2 + (mt)^2 - 2kt\langle kt+mt\rangle_n - 2mt\langle kt+mt\rangle_n + \langle kt+mt\rangle_n^2 \\
&= \frac{t^2(2n-1)(n-1)}{6n^2} + \frac{mt^2(n-1)}{n^2} + \frac{(mt)^2}{n^2} - \frac{2mt}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}\langle kt+mt\rangle_n + \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}\langle kt+mt\rangle_n^2 \\
&\quad - \frac{2t}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k\langle kt+mt\rangle_n\,.
\end{aligned}$$

Bemerkung.
Weil n und t nach Annahme teilerfremd sind, gilt $\sum_{k=0}^{n-1}\langle kt\rangle_n = \sum_{k=0}^{n-1} k$ *wie für* (16).

In $\sum_{k=0}^{n-1}\langle kt+mt\rangle_n$ *wiederum verschieben wir nun alle* kt *um einen konstanten Wert* mt*. Wenn nun* $\langle kt\rangle_n$ *jeden Wert zwischen* 0 *und* $n-1$ *genau einmal annimmt, so wird auch* $\sum_{k=0}^{n-1}\langle kt+mt\rangle_n$ *jeden Wert genau einmal annehmen, wobei dieser immer um einen konstanten Wert verschoben wird. Weil bei der Verschiebung um ganzzahlige* mt *die Menge aller Summanden in* $\sum_{k=0}^{n-1}\langle kt+mt\rangle_n$ *im Vergleich zu* $\sum_{k=0}^{n-1}\langle kt\rangle_n$ *gleich bleibt, interessiert uns nur die Verschiebung um* $mt - \lfloor mt\rfloor$*. Es folgt das Lemma:*

Lemma.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \langle kt + mt \rangle_n = \sum_{k=0}^{n-1} k + mt - \lfloor mt \rfloor \ . \tag{24}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} F = {} & \frac{t^2(2n-1)(n-1)}{6n^2} + \frac{mt^2(n-1)}{n^2} + \frac{(mt)^2}{n^2} \\ & - \frac{2mt}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k + mt - \lfloor mt \rfloor + \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} (k + mt - \lfloor mt \rfloor)^2 - \frac{2t}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k \langle kt + mt \rangle_n \ . \end{aligned}$$

Aus $\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$ und $\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$ folgen für die einzelnen Summen

$$\begin{aligned} \frac{2mt}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k + mt - \lfloor mt \rfloor &= \frac{2mt}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k + \frac{2mt}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} mt - \lfloor mt \rfloor \\ &= \frac{mt(n-1)}{n^2} + \frac{2mt(mt - \lfloor mt \rfloor)}{n^2} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} (k + mt - \lfloor mt \rfloor)^2 &= \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 + \frac{2(mt - \lfloor mt \rfloor)}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k + \frac{(mt - \lfloor mt \rfloor)^2}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} 1 \\ &= \frac{(2n-1)(n-1)}{6n^2} + \frac{(mt - \lfloor mt \rfloor)(n-1)}{n^2} + \frac{(mt - \lfloor mt \rfloor)^2}{n^2} \end{aligned}$$

und so bekommen wir

Satz.

$$\begin{aligned} F = {} & \frac{2n^2t^2 - 3nt^2 + t^2 + 2n^2 - 3n + 1}{6n^2} + \frac{nmt^2 - mt^2}{n^2} \\ & + \frac{-n \lfloor mt \rfloor + \lfloor mt \rfloor + \lfloor mt \rfloor^2}{n^2} - \frac{2t}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k \langle kt + mt \rangle_n \ . \end{aligned} \tag{25}$$

3.4 Zweite Auswertung

Für die zweite Auswertung betrachten wir (22) $F = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{t-1} j^2 N_j$. Dafür werden wir einen expliziten Ausdruck für N_j finden, diesen in F einsetzen und den entstandenen Ausdruck auswerten.

Nach unserer Definition (5) ist Element k genau dann in Box j enthalten, wenn
$j\frac{n}{t} \leq k+m < (j+1)\frac{n}{t}$ bzw. $j\frac{n}{t} - m \leq k < (j+1)\frac{n}{t} - m$. Um die Anzahl der Elemente N_j in Box j zu berechnen, werden wir wieder wie in (15) eine Berechnungsvorschrift dafür aufstellen. Dafür bemerken wir, dass I_j die Elemente

$$\left\lfloor \frac{jn}{t} - m \right\rfloor, \left\lfloor \frac{jn}{t} - m \right\rfloor + 1, \left\lfloor \frac{jn}{t} - m \right\rfloor + 2, \dots, \left\lfloor (j+1)\frac{n}{t} - m \right\rfloor$$

enthält. Um deren Anzahl N_j zu zählen, ziehen wir die kleinste natürliche Zahl, die in der Box enthalten ist, von der größten ab. Des Weiteren müssen wir für zwei Ausnahmen noch die Anzahl anpassen:

Weil die rechte Intervallgrenze unserer Teilintervalle nicht mitgezählt wird, müssen wir für $(j+1)\frac{n}{t} - m \in \mathbb{Z}$ die Anzahl um eins verringern. Anders herum erhöhen wir die Anzahl für $j\frac{n}{t} - m \in \mathbb{Z}$ um eins.

Satz (Berechnungsvorschrift N_j)**.**

$$N_j = \left\lfloor \frac{(j+1)n - mt}{t} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{jn - mt}{t} \right\rfloor + g_1(j,n,t,m) - g_2(j,n,t,m) \tag{26}$$

für

$$g_1(j,n,t,m) = \begin{cases} 1 & \textit{falls } j\frac{n}{t} - m \in \mathbb{Z}\,, \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

$$g_2(j,n,t,m) = \begin{cases} 1 & \textit{falls } (j+1)\frac{n}{t} - m \in \mathbb{Z}\,, \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Bemerkung. *Bei den Ausnahmefällen ist g_1 ist nur 1, wenn $m - \frac{1}{t}\langle jn\rangle_t \in \mathbb{Z}$ ist. Dann wird ein Element genau auf eine Intervallgrenze verschoben. Analog wird nur für $m - \frac{1}{t}\langle (j+1)n\rangle_t \in \mathbb{Z}$ $g_2 = 1$ gelten.*

Weil n und t teilerfremd sind und j von 0 bis $t-1$ läuft, gilt das nur für $m = \frac{k}{t}$ für $k \in \{1, \dots, t-1\}$

Es gibt also nur endlich viele m, für die g_1 und g_2 überhaupt relevant sind. Da wir nach Definition unseres Zufallsexperiment m zufällig wählen, können wir diese Fälle vernachlässigen.

Mit (14) bekommen wir dann

$$
\begin{aligned}
N_j &= \left\lfloor \frac{(j+1)n - mt}{t} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{jn - mt}{t} \right\rfloor \\
&= \frac{(j+1)n - mt - \langle (j+1)n - mt \rangle_t}{t} - \frac{jn - mt - \langle jn - mt \rangle_t}{t} \\
&= \frac{n - \langle (j+1)n - mt \rangle_t + \langle jn - mt \rangle_t}{t} \,.
\end{aligned}
$$

Das können wir nun in $F = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{t-1} j^2 N_j$ einsetzen und erhalten

$$
\begin{aligned}
F &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{t-1} j^2 \left(\frac{n - \langle (j+1)n - mt \rangle_t + \langle jn - mt \rangle_t}{t} \right) \\
&= \frac{1}{tn} \sum_{j=0}^{t-1} j^2 n - \frac{1}{tn} \sum_{j=0}^{t-1} j^2 \left(\langle (j+1)n - mt \rangle_t - \langle jn - mt \rangle_t \right) \,.
\end{aligned}
$$

Wir werden die letzte Summe genauer betrachten. Aufeinanderfolgende Summanden können hier zusammengefasst werden. Wir haben

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{t-1} j^2 \left(\langle (j+1)n - mt \rangle_t - \langle jn - mt \rangle_t \right) &= (\langle 2n - mt \rangle_t - \langle n - mt \rangle_t) + 4(\langle 3n - mt \rangle_t - \dots \\
&= -\langle n - mt \rangle_t + \langle 2n - mt \rangle_t - 4\langle 2n - mt \rangle_t + \dots \\
&= \sum_{j=1}^{t-1} ((j-1)^2 - j^2) \langle jn - mt \rangle_t + (t-1)^2 \langle tn - mt \rangle_t
\end{aligned}
$$

und mit $(j-1)^2 - j^2 = -2j + 1$ ergibt sich

$$
\sum_{j=0}^{t-1} j^2 (\langle (j+1)n - mt \rangle_t - \langle jn - mt \rangle_t) = \sum_{j=1}^{t-1} (-2j+1) \langle jn - mt \rangle_t + (t-1)^2 \langle tn - mt \rangle_t \,.
$$

Für F ergibt sich daraus

$$
\begin{aligned}
F &= \frac{1}{tn} \sum_{j=0}^{t-1} j^2 n - \frac{1}{tn} \sum_{j=1}^{t-1} (-2j+1) \langle jn - mt \rangle_t - \frac{(t-1)^2 \langle tn - mt \rangle_t}{tn} \\
&= \frac{(t-1)(2t-1)}{6} - \frac{(t-1)^2 \langle tn - mt \rangle_t}{tn} - \frac{1}{tn} \sum_{j=1}^{t-1} \langle jn - mt \rangle_t + \frac{2}{tn} \sum_{j=1}^{t-1} j \langle jn - mt \rangle_t \,.
\end{aligned}
$$

Bemerkung.
Analog zu (24) verschieben wir in $\sum_{k=0}^{n-1} \langle kt - mt \rangle_n$ *alle* kt *um einen konstanten Wert* mt*. Wenn nun* $\langle kt \rangle_n$ *jeden Wert zwischen* 0 *und* $n-1$ *genau einmal annimmt, so wird auch* $\sum_{k=0}^{n-1} \langle kt - mt \rangle_n$ *jeden Wert genau einmal annehmen, wobei dieser immer um einen konstanten Wert verschoben wird. Es interessiert wieder nur die Verschiebung um* $-mt + \lfloor mt \rfloor$*. Der Modulo bedeutet für uns effektiv, dass jedes Element um* 1 *und dann um* $-mt + \lfloor mt \rfloor$ *entgegengesetzt verschoben wird. Außerdem müssen wir beachten, dass der Index der Summe bei* 1 *und nicht bei* 0 *beginnt. Es folgt das Lemma:*

Lemma.

$$\sum_{j=1}^{t-1} \langle jn - mt \rangle_t = \sum_{j=0}^{t-1} (j + 1 - mt + \lfloor mt \rfloor) - \langle -mt \rangle_t \tag{27}$$

Wir erhalten nun

$$\begin{aligned} F = {} & \frac{(t-1)(2t-1)}{6} - \frac{(t-1)^2 \langle tn - mt \rangle_t}{tn} \\ & - \frac{1}{tn} \sum_{j=0}^{t-1} j + 1 - mt + \lfloor mt \rfloor + \frac{\langle -mt \rangle_t}{tn} + \frac{2}{tn} \sum_{j=1}^{t-1} j \langle jn - mt \rangle_t \end{aligned}$$

und damit

Satz.

$$\begin{aligned} F = {} & \frac{2t^2 - 3t + 1}{6} - \frac{(t-1)^2 \langle tn - mt \rangle_t}{tn} + \frac{\langle -mt \rangle_t}{tn} \\ & - \frac{t-1}{2n} - \frac{1 - mt + \lfloor mt \rfloor}{n} + \frac{2}{tn} \sum_{j=1}^{t-1} j \langle jn - mt \rangle_t \,. \end{aligned} \tag{28}$$

Letztendlich bleibt sowohl in (25) als auch in (28) ein Term übrig, den wir nicht vereinfachen können. Wir wollen diesen definieren als unsere modifizierte Dedekind-Rademacher Summe:

Definition (modifizierte Dedekind-Rademacher Summe)**.**

$$S_x(n,t) = \sum_{j=0}^{t-1} j \langle jn + x \rangle_t \tag{29}$$

Im folgenden Abschnitt wollen wir für diese eine Reziprozität folgern und diese dann in die der eigentlichen Summe überführen.

3.5 Reziprozität der modifizierten Dedekind-Rademacher Summe

Von (25) und (28) haben wir mit (29)

$$
\begin{aligned}
F &= \frac{2n^2t^2 - 3nt^2 + t^2 + 2n^2 - 3n + 1}{6n^2} + \frac{nmt^2 - mt^2}{n^2} \\
&\quad + \frac{-n\lfloor mt \rfloor + \lfloor mt \rfloor + \lfloor mt \rfloor^2}{n^2} - \frac{2t}{n^3} S_{mt}(t,n) \\
&= \frac{(t-1)(2t-1)}{6} - \frac{(t-1)^2 \langle tn - mt \rangle_t}{tn} + \frac{\langle -mt \rangle_t}{tn} \\
&\quad - \frac{t-1}{2n} - \frac{1 - mt + \lfloor mt \rfloor}{n} + \frac{2}{tn} S_{-mt}(n,t)\,.
\end{aligned}
$$

Bringen wir die modifizierten Summen auf eine Seite, so erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{t^2} S_{-mt}(n,t) + \frac{2}{n^2} S_{mt}(t,n) &= \frac{2n^2t^2 - 3nt^2 + t^2 + 2n^2 - 3n + 1}{6nt} + \frac{nmt^2 - mt^2}{nt} \\
&\quad + \frac{-n\lfloor mt \rfloor + \lfloor mt \rfloor + \lfloor mt \rfloor^2}{nt} \\
&\quad - \frac{2n^2t^2 - 3n^2t + n^2}{6nt} + \frac{(t-1)^2 \langle tn - mt \rangle_t - \langle -mt \rangle_t}{t^2} \\
&\quad + \frac{3nt - 3n}{6nt} + \frac{n - nmt + n\lfloor mt \rfloor}{nt}
\end{aligned}
$$

und damit

Satz (Reziprozität der modifizierten Dedekind-RademacherSumme)**.**

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{t^2} S_{-mt}(n,t) + \frac{2}{n^2} S_{mt}(t,n) &= \frac{-3nt^2 + t^2 + n^2 + 1 + 3nt + 3n^2t}{6nt} \\
&\quad + \frac{nmt^2 - mt^2 - nmt}{nt} + \frac{\lfloor mt \rfloor + \lfloor mt \rfloor^2}{nt} \\
&\quad + \frac{(t-1)^2 \langle tn - mt \rangle_t - \langle -mt \rangle_t}{t^2}\,.
\end{aligned}
\tag{30}
$$

3.6 Zusammenhang zur Dedekind-Rademacher Summe

Wir wollen letztlich den Zusammenhang der modifizierten zur eigentlichen Dedekind-Rademacher Summe zeigen und damit die Reziprozität auch für letztere herleiten.

Betrachten wir (3) mit

$$r_{-mt}(n,t) = \sum_{j=1}^{t-1} \left(\left(\frac{jn-mt}{t}\right)\right) \left(\left(\frac{j}{t}\right)\right) . \tag{31}$$

Mit der Definition der Sägezahnfunktion

$$\left(\left(\frac{jn}{t}\right)\right) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \frac{jn}{t} \in \mathbb{Z}\,, \\ \frac{jn}{t} - \left\lfloor \frac{jn}{t} \right\rfloor - \frac{1}{2} & \text{sonst} \end{cases}$$

und dem Zusammenhang von $\lfloor . \rfloor$ und $\langle . \rangle_t$ in (14) haben wir

$$\left(\left(\frac{jn}{t}\right)\right) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \frac{jn}{t} \in \mathbb{Z}\,, \\ \frac{1}{t}\langle jn \rangle_t - \frac{1}{2} & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Weil n und t nach Annahme teilerfremd, m kein Vielfaches von $1/t$ und $j \in \{1, \ldots, t-1\}$ sind, sind $\frac{jn-mt}{t}$ und $\frac{j}{t}$ keine ganzen Zahlen. Damit ist

$$\begin{aligned} r_{-mt}(n,t) &= \sum_{j=1}^{t-1} \left(\frac{1}{t}\langle jn-mt \rangle_t - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{t}\langle j \rangle_t - \frac{1}{2}\right) = \sum_{j=1}^{t-1} \left(\frac{1}{t}\langle jn-mt \rangle_t - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{t}j - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{t^2} \sum_{j=1}^{t-1} j \langle jn-mt \rangle_t - \frac{1}{2t} \sum_{j=1}^{t-1} \langle jn-mt \rangle_t - \frac{1}{2t} \sum_{j=1}^{t-1} j + \sum_{j=1}^{t-1} \frac{1}{4} \end{aligned}$$

und mit (27) haben wir

$$\begin{aligned} r_{-mt}(n,t) &= \frac{1}{t^2} S_{-mt}(n,t) - \frac{1}{2t} \sum_{j=1}^{t-1} j + 1 - mt + \lfloor mt \rfloor + \frac{\langle -mt \rangle_t}{2t} - \frac{1}{2t} \sum_{j=1}^{t-1} j + \sum_{j=1}^{t-1} \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{t^2} S_{-mt}(n,t) - \frac{t-1}{4} - \frac{1 - mt + \lfloor mt \rfloor}{2} + \frac{\langle -mt \rangle_t}{2t} . \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

Satz (Zusammenhang zur Dedekind-Rademacher Summe)**.**

$$S_{-mt}(n,t) = t^2 \left(r_{-mt}(n,t) + \frac{t-1}{4} + \frac{1-mt+\lfloor mt \rfloor}{2} - \frac{\langle -mt \rangle_t}{2t} \right) . \tag{32}$$

Bemerkung. *Das gilt analog für $S_{mt}(t,n)$ und $r_{mt}(t,n)$ mit*

$$S_{mt}(t,n) = n^2 \left(r_{mt}(t,n) + \frac{n-1}{4} + \frac{mt-\lfloor mt \rfloor}{2} - \frac{\langle mt \rangle_n}{2n} \right) .$$

Setzen wir diese nun in die Reziprozität der modifizierten Summe (30) ein, erhalten wir

$$\begin{aligned}
2\, r_{-mt}(n,t) + 2\, r_{mt}(t,n) = {} & \frac{-3nt^2+t^2+n^2+1+3nt+3n^2t}{6nt} + \frac{nmt^2-mt^2-nmt}{nt} \\
& + \frac{\lfloor mt \rfloor + \lfloor mt \rfloor^2}{nt} \\
& + \frac{(t-1)^2\langle tn-mt \rangle_t - \langle -mt \rangle_t}{t^2} \\
& - \frac{t-1}{2} - 1 + mt - \lfloor mt \rfloor + \frac{\langle -mt \rangle_t}{t} \\
& - \frac{n-1}{2} - mt + \lfloor mt \rfloor + \frac{\langle mt \rangle_n}{n} .
\end{aligned}$$

Mit $\langle tn-mt \rangle_t = \langle -mt \rangle_t$ bekommen wir

$$\begin{aligned}
2\, r_{-mt}(n,t) + 2\, r_{mt}(t,n) = {} & \frac{-3nt^2+t^2+n^2+1+3nt+3n^2t}{6nt} + \frac{nmt^2-mt^2-nmt}{nt} \\
& + \frac{\lfloor mt \rfloor + \lfloor mt \rfloor^2}{nt} \\
& + \frac{n(t^2-2t+1-1)\langle -mt \rangle_t}{nt^2} \\
& - \frac{3nt^2-3nt}{6nt} - \frac{6nt}{6nt} + \frac{nt\langle -mt \rangle_t}{nt^2} \\
& - \frac{3n^2t-3nt}{6nt} + \frac{\langle mt \rangle_n}{n}
\end{aligned}$$

und damit

$$
\begin{aligned}
2\, r_{-mt}(n,t) + 2\, r_{mt}(t,n) = {} & \frac{-6nt^2 + t^2 + n^2 + 1 + 3nt}{6nt} + \frac{nmt^2 - mt^2 - nmt}{nt} + \frac{\lfloor mt \rfloor + \lfloor mt \rfloor^2}{nt} \\
& + \frac{(nt^2 - 2nt)\langle -mt \rangle_t}{nt^2} + \frac{nt\langle -mt \rangle_t}{nt^2} + \frac{\langle mt \rangle_n}{n}.
\end{aligned}
$$

Mit $\langle -mt \rangle_t = \langle t - mt \rangle_t = t(1-m)$ bekommen wir

$$
\begin{aligned}
2\, r_{-mt}(n,t) + 2\, r_{mt}(t,n) = {} & \frac{-6nt^2 + t^2 + n^2 + 1 + 3nt}{6nt} + \frac{nmt^2 - mt^2 - nmt}{nt} + \frac{\lfloor mt \rfloor + \lfloor mt \rfloor^2}{nt} \\
& + \frac{nt^2 - nt - mnt^2 + nmt}{nt} + \frac{\langle mt \rangle_n}{n} \\
= {} & \frac{-6nt^2 + t^2 + n^2 + 1 + 3nt}{6nt} + \frac{-mt^2}{nt} + \frac{\lfloor mt \rfloor + \lfloor mt \rfloor^2}{nt} \\
& + \frac{6nt^2 - 6nt}{6nt} + \frac{\langle mt \rangle_n}{n}
\end{aligned}
$$

und über (14) haben wir mit $\langle mt \rangle_n = mt - n \left\lfloor \frac{mt}{n} \right\rfloor$

$$
2\, r_{-mt}(n,t) + 2\, r_{mt}(t,n) = \frac{t^2 + n^2 + 1 - 3nt}{6nt} - \frac{mt}{n} + \frac{\lfloor mt \rfloor + \lfloor mt \rfloor^2}{nt} + \frac{mt - n \left\lfloor \frac{mt}{n} \right\rfloor}{n}.
$$

Damit folgt

Satz (Reziprozität der Dedekind-Rademacher Summme)**.**

$$
r_{-mt}(n,t) + r_{mt}(t,n) = \frac{1}{12}\left(\frac{t}{n} + \frac{1}{nt} + \frac{n}{t}\right) - \frac{1}{4} + \frac{\lfloor mt \rfloor + \lfloor mt \rfloor^2}{2nt} - \frac{1}{2}\left\lfloor \frac{mt}{n} \right\rfloor
$$

für $n, t \in \mathbb{Z}_{>0}$ *mit* $n < t$, $m \in [0,1)$ *und* $m \neq \frac{k}{t}$ *für* $k \in \{1, \ldots, t-1\}$.

3.7 Schlusswort

Über unseren Ansatz aus dem ersten Teil ist es uns gelungen, die gewünschte Eigenschaft der Dedekind-Rademacher Summe herzuleiten. Dabei bedurften die einzelnen Schritte eher grundlegendem mathematischen Wissen und waren meist leicht nachvollziehbar. Annahmen wie $mt \notin \mathbb{Z}$ haben sich hier ganz natürlich aus dem Versuchsaufbau heraus entwickelt und mussten nicht einfach nur hingenommen werden. Andererseits bietet sich an genau der Stelle, an der wir die Annahme getroffen haben, der Ansatz für eine Ausführung ohne diese Voraussetzung und vermutlich der Weg zur allgemeingültigen Reziprozität.

Eine solche Art zu Beweisen bietet uns genau die Möglichkeiten, die Dedekind im Zitat aus der Einleitung beschrieben hatte: Es ist uns dadurch möglich, reale Vorstellungen auf mathematische Objekte zu überführen. Die Verknüpfung der Vorstellung zu sinnvollen Beispielen mit den Eigenschaften, die sich daraus ergeben, begünstigen dadurch ein nachhaltiges Auseinandersetzen mit den behandelten Inhalten.

4 Appendix

4.1 Bemerkungen

Die Verschiebung m aus unserem Gedankenexperiment, die lediglich auf den Bereich $[0, 1)$ beschränkt ist, liefert über mt eine Verschiebung in der Dedekind-Rademacher Summe, die den gesamten reellen Raum bis auf die ganzen Zahlen abdeckt.

Vielfache von t als Verschiebung in der Summe sind in unserem Fall durch $m = 0$ repräsentiert und bewirken damit eine Reziprozität gleich der Dedekindsumme.

Wie bereits erwähnt ergibt sich der fehlende Teil der Reziprozität für $mt \in \mathbb{Z}$, wie er in [4] auf Seite 382 zu finden ist, vermutlich aus einer Untersuchung der Sonderfälle in (26).

4.2 Agile Mathematik

Für die Ausarbeitung des zweiten Teils wurde ein Verfahren gewählt, das man als „Agile Mathematik"bezeichnen kann. Dabei wurde mit Hilfe von Programmcode in Python nach fast jeder Umformung überprüft, ob für eine große Anzahl von verschiedenen Parametern die ursprüngliche Form und die Umformung das Gleiche ergeben. Hier die Funktion, die den Vergleich durchführt:

```python
import numpy as np

def compare(t_range:int = 20, real = reciprocity_1, attempt = reciprocity_2, ignore_m = [],grain = 4):
  #test for t in range t_range and n in range t and multiple m if attempt(n,t,m) = real(n,t,m)
  #ignore values of m contained in ignore_m (usefull for manually ignoring values of m)
  #note: np.rint and big powers of 10 were used to prevent errors due to floating point operations
  # grain is a parameter that defines how many decimal places are relevant for the comparison
  # in certain cases a grain of about 4 is optimal, sometimes it needs to be 5 or higher
  # due to floating point operations
  for t in range(1,t_range):
    for n in range(1,t):
      if gcd(n,t)!=1:
        #if n and t are not coprime, skip this pair of parameters
        continue
      for m in [0.001*i for i in range(1,1000)]:
        #for every pair of integers n and t try for 999 different Values of m between 0 and 1
        if np.rint(m*10000) in ignore_m + [np.rint(10000*i*1/t) for i in range(t)]:
          #ignore m, if it is a mutliple of 1/t or in ignore_m
          continue
        if np.rint(10**grain*real(n,t,m)) != np.rint(10**grain*attempt(n,t,m)):
          #if a comparison failed, print values of n, t and m
          print("Failed for (n,t,m) = " , (n,t,m))
          print("real: ", real(n,t,m))
          print("attempt: ", attempt(n,t,m))
          return (n,t,m)
    print("Passed for t = ", t)
```

Und hier ein Beispiel für einen Testlauf für die Reziprozität der modifizierten Dedekind-Rademacher Summe (30):

```
#example for reciprocity of modified Dedekind-Rademacher sum
def modifiedRadsum(n,t,x):
  sum = 0
  for j in range(t):
    sum+= j*np.mod(j*n+x,t)
  return sum

def reciprocity_1(n,t,m):
  return 2/(t**2)*modifiedRadsum(n,t,-m*t) + 2/(n**2)*modifiedRadsum(t,n,m*t)

def reciprocity_2(n,t,m):
  output = (-3*n*t**2 + t**2 +n**2 + 1 + 3*n*t + 3*n**2*t)/(6*n*t) + (n*m*t**2 - m*t**2 - n*m*t)/(n*t)
  output += (np.floor(m*t) + np.floor(m*t)**2)/(n*t) + ((t-1)**2*np.mod(t*n-m*t,t)-np.mod(-m*t,t))/(t**2)
  return output

compare(real =reciprocity_1, attempt=reciprocity_2, grain = 7)
```

Durch diese Arbeitsweise kann garantiert werden, dass die Zwischenergebnisse der Arbeit korrekt sind, auch wenn noch unklar ist, ob die Untersuchung zum gewünschten finalen Ergebnis führt. So können Parameter, die einen Sonderfall darstellen, umgangen werden. Die nachträgliche Überprüfung und Verbesserung von Ausführungen kann dadurch vermieden, Zeit gespart und der Fokus auf die relevanten Fragestellungen der Arbeit gelenkt werden.

Literatur

[1] Richard Dedekind. *Vorwort*, pages vii–xviii. Cambridge Library Collection - Mathematics. Cambridge University Press, 2012.

[2] Matthias Beck and Sinai Robins. *Computing the continuous discretely*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, second edition, 2015. Integer-point enumeration in polyhedra, With illustrations by David Austin.

[3] Hans Rademacher and Emil Grosswald. *Dedekind sums*. The Carus Mathematical Monographs, No. 16. The Mathematical Association of America, Washington, D.C., 1972.

[4] Matthias Beck and Florian Kohl. Rademacher-Carlitz polynomials. *Acta Arith.*, 163(4):379–393, 2014.

[5] Karl Dilcher and Kurt Girstmair. Dedekind sums and uniform distributions. *Amer. Math. Monthly*, 109(3):279–284, 2002.