FREIE UNIVERSITÄT BERLIN

BACHELORARBEIT

WINTERSEMESTER 2020/21

Erzeugendenfunktionen von Kompositionen mit Teilen aus endlichen und unendlichen Mengen: Ein algebraisches Zählverfahren

---

Autor

J. C. HEYDEBRECK , 4745800 , Jan.Heydebreck@fu-berlin.de

Dozent

Prof. Dr. M. BECK , beck@zedat.fu-berlin.de

21. April 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Definition 1. Ein $k-$Tupel $(\lambda_i)_{i \leq k}$ positiver ganzer Zahlen heißt *Komposition von*[1] $n \in \mathbb{N}$, wenn

$$n = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i.$$

Dabei ist k die *Länge* und jedes λ_i ein *Teil* der Komposition.

Definition 2. Nun sei $c(n)$ die Anzahl der Kompositionen von n, wobei zwei Kompositionen verschieden sind, sobald sich die Tupel an einer Stelle unterscheiden. Weiterhin bezeichne $c_A(n)$ die Anzahl der Kompositionen von n, deren Teile in $A \subset \mathbb{N}$ liegen.

Bemerkung. Wie Satz 2 zeigen wird, ist es sehr einfach, $c(n)$ für gegebenes $n \in \mathbb{N}$ zu bestimmen. Um für gegebene Mengen A jedoch $c_A(n)$ zu berechnen, muss man im Allgemeinen sehr viel mehr Aufwand leisten.

Diese Arbeit stellt einen algebraischen Weg vor, um $c_A(n)$ für beliebige Mengen A zu berechnen. In einigen Fällen liefern zwei verschiedene Mengen A und B überraschend $c_A(n) = c_B(n)$, oder es existiert zumindest ein $m \in \mathbb{N}$ mit $c_A(n) = c_B(n+m)$. Ein Beispiel für solche Mengen, bei denen sogar nur eine der beiden endlich ist, enthält der vermutlich bislang übersehene Satz 1:

Satz 1. *Sei $A := \mathbb{N}_{\geq m}$ und $B := \{1, m\}$. Dann ist $c_A(n) = c_B(n-m)$ für alle $n > m$.*

Der Beweis wird ausführlich in Kapitel 5 geführt. Im gleichen Kapitel gibt Lemma 2 einen Ausblick auf das verallgemeinerte Verhältnis von solchen Mengenpaaren.
Zunächst wird in Kapitel 2 die relativ junge Forschungsgeschichte der Funktionen $c_A(n)$ historisch nachvollzogen und präsentiert. Kapitel 3 legt dann die algebraischen Grundlagen für Lemma 1, welches das wesentliche Werkzeug ist, um die Sätze aus Kapitel 5 zu beweisen:

[1] früher auch *geordnete Zahlpartition von*.

Lemma 1. *Für die $c_A(n)$ erzeugende Funktion $C_A(x) := 1 + \sum_{n \geq 1} c_A(n) x^n$ gilt*

$$C_A(x) = \frac{1}{1 - \sum_{m \in A} x^m}.$$

Der Beweis steht in Kapitel 4. Die Arbeit schließt mit einem auf der Aussage von Lemma 1 aufbauenden, algorithmischen Verfahren. Dadurch können die Werte $c_A(n)$ rekursiv für beliebige A berechnet werden.

2 Historisches

Das Forschungsfeld der Kompositionen ist verhältnismäßig jung. Das liegt wohl daran, dass das verwandte Konzept der *Partitionen* lange Zeit wesentlich ertragreicher erschien. Eine Partition ist dabei nichts Anderes als eine ungeordnete Komposition. Bezeichnet $P(n)$ die Anzahl an Partitionen von n, dann ist unmittelbar klar, dass $P(n) \leq c(n)$.

Satz 2. *Für $n \in \mathbb{N}$ ist $c(n) = 2^{n-1}$.*

Der Beweis dazu wird in Kapitel 4 geführt, aber die Aussage ist schon lange bekannt. Unter anderem findet sie sich bei Moser und Whitney (1961) und bei Carlitz (1976), aber auch in Lehrbüchern wie von Steger (2007). Ein originaler Urheber ist nicht mehr zu ermitteln. Die daraus folgende Abschätzung der Partitionsfunktion $P(n) \leq 2^{n-1}$ ist seit Jahrhunderten bekannt und konnte erst durch Hardy und Ramanujan (1918) verbessert werden. Ihre Ergebnisse sind direkt auf Euler (1753) und seinen Pentagonalzahlensatz zurückzuführen.
Erst in der Mitte des 20. Jahrhunderts wurden Kompositionen zu einem eigenen Gegenstand der Forschung. Eine der ersten Veröffentlichungen kam von Moser und Whitney (1961). Sie schränkten die Teile nicht auf gewisse Mengen ein, sondern verliehen den einzelnen Summanden Gewichte. Eger (2013) hat gezeigt, dass sich diese beiden unterschiedlichen Ansätze auch miteinander vereinen lassen. Entscheidend für den Fortschritt von Moser und Whitney war Lemma 1, das in der Einleitung vorgestellt wurde und in Kapitel 4 bewiesen wird. Sie scheinen der Veröffentlichung nach diese Aussage eigenständig gefunden zu haben. Bei Feller (1968), dessen Erstausgabe bereits 1950 erschien, finden wir das Lemma ebenfalls, allerdings wird es dort für die Stochastik genutzt. Es ist völlig unklar, ob Feller der früheste Urheber des Lemmas ist, aber in jedem Fall ist es seitdem für die Erforschung der Kompositionen unabdingbar geworden. Hoggatt und Lind (1968) verallgemeinerten den Ansatz von Moser und Whitney und zeigten wahrscheinlich als erste, dass für A als Menge der ungeraden

Zahlen die Werte $c_A(n)$ Fibonacci-Zahlen sind.[2]

Neben den Gewichten und den Einschränkungen der Teile entwickelten sich weitere Konzepte. Carlitz (1976) betrachtete zum Beispiel Kompositionen, bei denen benachbarte Teile nicht gleich sein durften. Zu dieser Zeit war das Forschungsfeld noch so neu, dass unklar war, ob die Null als Teil generell verboten sein sollte oder nicht,[3] daher bezog er immer beide Fälle mit ein. Eine andere Kategorie sind die von Hoggatt und Bicknell (1975) eingeführten *Palindrome*. Das sind Kompositionen, deren Teile symmetrisch in dem Sinne sind, dass man sie von links nach rechts und von rechts nach links lesen kann.[4] Wie die Vorveröffentlichung von Just (2021) zeigt, wird auch dieser Ansatz noch heute wissenschaftlich bearbeitet und ausgebaut.

Dennoch sind Kompositionen ein sehr kleines Forschungsgebiet in der Mathematik. Von Heubach und Mansour (2009) stammt eine der wenigen regelmäßig zitierten Monographien zu dem Thema. Zu Partitionen im Allgemeinen gibt es mit knapp 5000 Zitationen ein Standardwerk von Andrews (1998). Kompositionen werden darin aber nur nebensächlich behandelt.

Für Kompositionen auf speziellen Mengen $A \subset \mathbb{N}$ ist wohl der Artikel von Alladi und Hoggatt (1975) wegweisend gewesen. Darin taucht erstmals der simple Fall $A = \{1, 2\}$ auf, der in dieser Arbeit als Beispiel 2 das Kapitel 5 eröffnet. Allgemeinere Fälle untersuchten insbesondere Heubach und Mansour (2004). Auf ihrer Arbeit baute dann die Forschung der letzten Jahre mit Ergänzungen wie der von Beck und Robbins (2015) auf. Es zeigt sich, dass das Forschungsfeld wächst und aktiv bearbeitet wird.

[2] Den Nachweis dazu gibt es in Beispiel 3 in Kapitel 5.
[3] Natürlich bezieht sich das nur auf Fälle, bei denen die Länge der Kompositionen beschränkt wird.
[4] Zum Beispiel ist (3,2,1,2,3) eine palindromische Komposition von 11.

3 Polynome und Erzeugendenfunktionen

Die aus der Schule bekannten *Polynome* werden üblicherweise als spezielle Formen von Abbildungen definiert. Eine ausreichende Einführung findet sich zum Beispiel bei Beutelspacher (2018). Typisch für einen ersten Ansatz wäre folgende Definition:

Definition 3. Eine Abbildung $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt Polynom(-funktion), wenn ein $n \in \mathbb{N}_0$ und ein Tupel $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ existieren, sodass

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Die Menge der Polynome könnte man dann ohne Umwege als $\mathbb{R}[x]$ einführen:

$$\mathbb{R}[x] := \left\{ p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} | \exists n \in \mathbb{N}_0 \exists (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \colon \forall x \in \mathbb{R}\colon p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right\}$$

Häufig betrachtet man Polynome, weil sie besonders einfache Eigenschaften besitzen: Sie sind stetig, beliebig oft differenzierbar und ihre Graphen bestens untersucht. Solange man sich nur mit einem Polynom zur Zeit befasst, ist die obige Definition ausreichend. Problematisch wird es, wenn man nun zwei Polynome $p, q \in \mathbb{R}[x]$ addieren möchte. Grundsätzlich möchte man einfach die Koeffizienten addieren, aber unter Umständen sind die gegebenen Tupel verschieden lang. In diesem Fall hat es sich bewährt, dem 'kürzeren' Polynom hinreichend viele Nullen hinzuzufügen. Um dieses Problem grundsätzlich zu umgehen, kann man Polynome direkt als unendliche Summe auffassen, bei der fast alle Summanden null sind:

$$\mathbb{R}[x] := \left\{ p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} | \exists (a_i)_{i \in \mathbb{N}_0} \colon \forall x \in \mathbb{R}\colon p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \wedge \exists n \in \mathbb{N}\colon i > n \Rightarrow a_i = 0 \right\}$$

Auf dieser Menge definieren wir nun die kanonische Addition und Multiplikation:

Definition 4. Zu gegebenen $a = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, b = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ sei

$$a + b := \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k \text{ und} \tag{3.1}$$

$$a \cdot b := \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{k} (a_n b_{k-n}) x^k. \tag{3.2}$$

Damit wird $\mathbb{R}[x]$ zu einem Ring. Wenn man diesen Ring untersucht, interessiert man sich kaum noch für Polynome als Abbildungen. Die abstrakte algebraische Perspektive ignoriert die Bedeutung ihrer Elemente über den Ring hinaus, sodass es keine Rolle mehr spielt, ob und wo diese Polynome Nullstellen, Extrema oder Wendepunkte haben. Die zweite Bedingung, die wir in $\mathbb{R}[x]$ gefordert haben, also dass fast alle Koeffizienten null sind, ist dadurch aber nicht mehr notwendig. Die Ringelemente ließen sich schließlich auch addieren und multiplizieren, wenn die Koeffizienten alle von null verschieden wären, daher verallgemeinern wir die Struktur und erhalten den Ring der *Erzeugendenfunktionen*,[5] der auf der Menge $\mathbb{R}[[x]]$ definiert ist mit

$$\mathbb{R}[[x]] := \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, a_k \in \mathbb{R} \right\}.$$

Nun ist allerdings jeder Bezug zu Abbildungen verschwunden. Es wäre daher durchaus möglich, sich auch noch von der Summe und dem Platzhalter x zu verabschieden und die Addition und die Multiplikation auf der Menge der Folgen zu definieren. Tatsächlich ist dies legitim, aber um nicht zu vergessen, woher die Motivation für den Ring stammt, belassen wir es bei der obigen Definition und definieren die Addition und Multiplikation wie in 3.1 und 3.2. Für den weiteren Verlauf wird ein wiederkehrendes Motiv sein, eine kombinatorisch relevante Folge zu berechnen, indem wir eine algebraische Gleichung im Ring der Erzeugendenfunktionen mithilfe des Koeffizientenvergleichs lösen. Besonders spannend ist dafür die Division, da sie als einzige der vier Grundrechenarten nur bedingt in einem Ring funktioniert. Erstaunlich ist, wie viele der Erzeugendenfunktionen ein multiplikatives Inverses besitzen, und wie häufig eine Division daher gelingt:

Präposition 1. *Zu einem gegebenen $p \in \mathbb{R}[[x]]$ mit $p = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ existiert genau dann ein multiplikativ inverses Element $q \in \mathbb{R}[[x]]$, wenn $a_0 \neq 0$.*

Diese Behauptung verblüfft auf den ersten Blick, weil die geforderte Bedingung unvergleichbar harmlos ist. Die Möglichkeit zur Bildung eines Inversen hängt also ein-

[5] Eine übersichtliche, aktuelle Einführung findet man zum Beispiel bei Andrica und Bagdasar (2020).

zig am allerersten der unendlich vielen Folgenglieder? Ja, und der Beweis verdeutlicht auch, warum.

Beweis. Zunächst sei $p = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \in \mathbb{R}[[x]]$ mit $a_0 = 0$. Nun ist für ein beliebiges $q = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ nach Definition das Produkt

$$p \cdot q = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,$$

wobei $c_0 = a_0 \cdot b_0 = 0$ ist, und damit folgt schon $pq \neq 1$.
Sei nun $p = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \in \mathbb{R}[[x]]$ mit $a_0 \neq 0$. Wir konstruieren rekursiv eine Folge (b_n) und zeigen dann, dass $q := \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ das Inverse zu p ist.
Sei also $b_0 := \frac{1}{a_0}$, das ist wegen $a_0 \neq 0$ wohldefiniert. Wir setzen dann rekursiv für $n > 0$

$$b_n := \frac{-1}{a_0} \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Für das Produkt

$$p \cdot q = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

ergibt sich dann wieder nach Definition der Multiplikation $c_0 = a_0 \cdot b_0 = a_0 \cdot \frac{1}{a_0} = 1$, und für $n > 0$ ist

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 \cdot \frac{-1}{a_0} \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k} + \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k} = 0.$$

Damit ist in der Tat $p \cdot q = 1$ und p ist invertierbar. □

Einige der Erzeugendenfunktionen haben ganz erstaunliche Inverse. So ist die durch die konstante 1-Folge induzierte erzeugende Funktion

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

invers zu $1 - x$. Wem das Nachrechnen keinen Spaß macht, der denke an die geometrische Reihe und ihren Grenzwert. Die Inversen sind also gar nicht notwendigerweise unendlich lang. Diese Erkenntnis motiviert den Begriff der *rationalen Erzeugendenfunktionen*.

Definition 5. Eine Erzeugendenfunktion $p \in \mathbb{R}[[x]]$ heißt *rational*, wenn zwei Polynome $a, b \in \mathbb{R}[x]$ existieren mit

$$b \cdot p = a.$$

Die Multiplikation eines Polynoms mit einer Erzeugendenfunktion erfolgt, indem das Polynom selbst als Erzeugendenfunktion aufgefasst werden kann.

Beispiel 1. $\sum_{k \geq 0} x^k$ ist rational, denn es gilt $(1 - x) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1$.

Nun liegt es nahe, p in Form eines Bruchs $\frac{a}{b}$ zu schreiben.[6] Diese intuitive Umschreibung von p werden wir nun in einigen Schritten formalisieren.

Präposition 2. *Die rationalen Erzeugendenfunktionen bilden einen Unterring von* $\mathbb{R}[[x]]$.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass die Struktur abgeschlossen bezüglich der beiden Rechenoperationen ist. Gegeben seien dazu zwei rationale Erzeugendenfunktionen p und q mit $bp = a$ und $dq = c$, wobei $a, b, c, d \in \mathbb{R}[x]$. Dann ist auch

$$\begin{aligned} (bd) \cdot (p + q) &= ad + bc \quad \text{und} \\ (bd) \cdot (p \cdot q) &= ac \end{aligned}$$

Und damit sind sowohl $p + q$ als auch $p \cdot q$ rational. □

Bemerkung. Ist $p \neq 0$ eine rationale Erzeugendenfunktion, dann können wir jederzeit voraussetzen, dass $a, b \in \mathbb{R}[x] \setminus \{0\}$ existieren mit $bp = a$.

Diesen Unterring können wir nun mit dem Körper der rationalen Funktionen identifizieren. Für jede rationale Erzeugendenfunktion p existieren Polynome b und a mit $bp = a$. Wir definieren dann $\Phi(p) := \frac{a}{b}$. Diese Abbildung bereitet keine Probleme, algebraisch bedeutet das:

Präposition 3. *Die Abbildung Φ der rationalen Erzeugendenfunktionen in die rationalen Funktionen ist ein injektiver Ringhomomorphismus.*

Beweis. Dafür sind gleich mehrere Aussagen zu zeigen. Wir beginnen damit, dass die Abbildung Φ wohldefiniert ist (I), danach zeigen wir, dass es sich um einen Ringhomomorphismus handelt (II). Zuletzt folgern wir, dass die Abbildung injektiv ist (III).

[6] Beispielsweise bei Stanley (2011) finden wir diese direkte Definition. Dennoch ist das Kapitel eine sehr ausführliche und zugängliche Einleitung in das Thema.

I. Sei p eine rationale Erzeugendenfunktion mit vier Polynomen a_1, a_2, b_1, b_2 und

$$\begin{aligned} b_1 p = a_1 \quad &\text{und} \quad b_2 p = a_2. \\ &\Rightarrow b_2 b_1 p = a_1 b_2 \\ &\Rightarrow b_1 a_2 = a_1 b_2 \\ &\Rightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \end{aligned}$$

Dann ist zwar nach Definition einerseits $\Phi(p) = \frac{a_1}{b_1}$ und andererseits $\Phi(p) = \frac{a_2}{b_2}$, aber beide Werte sind gleich.

II. Seien p, q Erzeugendenfunktionen mit Polynomen a, b, c, d und $bp = a$ und $dq = c$. Dann ist wie im Beweis von Präposition 2 $(bd)(p + q) = ad + bc$ und daraus folgt schon

$$\Phi(p+q) = \frac{ad + bc}{bd} = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \Phi(p) + \Phi(q).$$

Analog liefert die Gleichung $(bd)(pq) = ac$ direkt

$$\Phi(p \cdot q) = \frac{ac}{bd} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \Phi(p) \cdot \Phi(q).$$

III. Seien p, q wie in II. Wenn nun $\Phi(p) = \Phi(q)$ ist, dann folgt aus II

$$0 = \Phi(p) - \Phi(q) = \Phi(p - q).$$

Es genügt daher zu zeigen, dass die Implikation $\Phi(p) = 0 \Rightarrow p = 0$ gilt. Für $p \neq 0$ dürfen wir aber wie bereits bemerkt $a, b \neq 0$ wählen, und dann ist auch $\Phi(p) = \frac{a}{b} \neq 0$. □

Da die Abbildung injektiv ist, erhalten wir eine eineindeutige Zuordnung zwischen den rationalen Erzeugendenfunktionen und ihren korrespondierenden rationalen Funktionen. Die homomorphe Abbildung Φ ist strukturerhaltend. Deshalb können wir in Zukunft beliebig zwischen den Ringen wechseln. Mit diesen Strukturen sind die algebraischen Voraussetzungen geschaffen, um die folgenden kombinatorischen Probleme zu lösen. Dabei verzichten wir auf die Notation von Φ und schreiben einfach ab hier ein Gleichheitszeichen zwischen die Potenzreihe und den Bruch aus Polynomen.

4 Das Zählen von Kompositionen

Grundsätzlich wollen wir einen eleganten Weg beschreiben, um die Anzahl an *Kompositionen* einer vorgegebenen Zahl n unter gewissen Nebenbedingungen zu berechnen. Dazu erinnern wir uns an die Definitionen 1 und 2 aus der Einleitung:
Eine *Komposition* einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist ein Tupel, dessen Einträge natürliche Zahlen sind, deren Summe n ist. Die Anzahl der Kompositionen von n nennen wir $c(n)$ und für eine Menge $A \subset \mathbb{N}$ definieren wir $c_A(n)$ als die Anzahl an Kompositionen von n, bei denen jeder Teil aus der Menge A stammt.
Im Allgemeinen ist es überraschend problematisch, zu gegebenen A und n den Wert $c_A(n)$ zu zählen. Natürlich können zahlentheoretische Überlegungen dabei helfen, gewisse Fälle zu zählen oder abzuschätzen, aber um ein allgemeines Verfahren für beliebige Mengen A zu konstruieren, genügt das nicht. Lässt man die Einschränkung für die Teile jedoch weg und zählt zunächst nur $c_{\mathbb{N}}(n) = c(n)$, dann ist das Ergebnis nach Satz 2 immer eine Zweierpotenz. Für diesen Beweis genügt ein einfaches kombinatorisches Argument:

Beweis von Satz 2. Betrachten wir den Ausdruck

$$(1 \wedge 1 \wedge 1 \ \dots \ \wedge 1 \wedge 1),$$

der hier n Einsen enthalte. Indem wir jedes $\wedge$ entweder durch ein $+$ oder ein Komma ersetzen, lassen sich alle Kompositionen von n ausdrücken. Da es $n-1$ Plätze zwischen den Einsen gibt und jeder Platz von zwei möglichen Zeichen besetzt werden kann, ergeben sich 2^{n-1} Kompositionen. $\square$

Für alle weiteren Sätze und Beweise benötigen wir Lemma 1 aus der Einleitung. Mit dem Lemma verlagern wir das Problem in den Ring der rationalen Erzeugendenfunktionen.

Beweis von Lemma 1. Es sei zunächst $j \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest. Wir wollen zählen, wie viele Kompositionen von n es gibt, deren Teile in A liegen und deren Länge j ist. Dazu betrachten wir den Ausdruck

$$\left(\sum_{m\in A} x^m\right)^j = \prod_{i=1}^{j} \sum_{m\in A} x^m.$$

Um dieses Produkt wieder als Summe von Monomen ausschreiben zu können, muss man nun alle Kombinationsmöglichkeiten ausmultiplizieren. Jedes entstehende Monom ist dann von der Form $x^{(m_1+m_2+\cdots+m_j)}$ und lässt sich direkt mit der entsprechenden Komposition $(m_1, m_2, \ldots, m_j)$ identifizieren. Monome mit gleichem Exponenten können dann zusammengefasst werden, und so lässt sich der Ausdruck umschreiben zu

$$\sum_{i\geq j} a_i x^i,$$

wobei der Koeffizient a_i direkt angibt, wie viele Kompositionen von i mit Länge j und Teilen aus A gebildet werden können. Es handelt sich also bei diesem Ausdruck um die Erzeugendenfunktion der $j-$Kompositionen. Wir können nun die allgemeine Erzeugendenfunktion nach der jeweiligen Länge der Kompositionen aufteilen. Das führt dann zu

$$C_A(x) = 1 + \sum_{j\geq 1} \left(\sum_{m\in A} x^m\right)^j.$$

Das Lemma können wir nun direkt nachrechnen, wobei wir zur besseren Lesbarkeit mit $\alpha := \sum_{m\in A} x^m$ arbeiten:

$$\begin{aligned} C_A(x) \cdot \left(1 - \sum_{m\in A} x^m\right) &= \left(1 + \sum_{j\geq 1} \alpha^j\right) \cdot (1-\alpha) \\ &= \left(\sum_{j\geq 0} \alpha^j\right) \cdot (1-\alpha) \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

5 Anwendungen

5.1 Endliche Mengen

Beispiel 2. Wählen wir $A := \{1,2\}$, dann ist nach Lemma 1

$$1 + \sum_{n\geq 1} c_A(n)x^n = \frac{1}{1-x-x^2}.$$

Wir stellen um, schreiben das Produkt aus und fassen dann die Summanden durch ein paar Indexverschiebungen zusammen:

$$\begin{aligned}
1 &= (1-x-x^2)\cdot\left(1+\sum_{n\geq 1} c_A(n)x^n\right) \\
&= 1-x-x^2+\sum_{n\geq 1} c_A(n)x^n - \sum_{n\geq 1} c_A(n)x^{n+1} - \sum_{n\geq 1} c_A(n)x^{n+2} \\
&= 1-x-x^2+\sum_{n\geq 1} c_A(n)x^n - \sum_{n\geq 2} c_A(n-1)x^n - \sum_{n\geq 3} c_A(n-2)x^n \\
&= 1+(c_A(1)-1)x+(c_A(2)-c_A(1)-1)x^2+\sum_{n\geq 3}(c_A(n)-c_A(n-1)-c_A(n-2))x^n.
\end{aligned}$$

Bis auf den konstanten Term müssen die Koeffizienten alle null werden. Daraus folgt direkt $c_A(1) = 1$, $c_A(2) = 2$, und für $n \geq 3$ ist $c_A(n)$ rekursiv definiert durch $c_A(n) = c_A(n-1) + c_A(n-2)$. Das bedeutet, dass $c_A(n) = f_{n+1}$ ist. Wir haben es mit einer verschobenen Folge der *Fibonacci*-Zahlen zu tun.

Die Fibonacci-Zahlen treten auch auf, wenn A_m von der Form $\{m, 2m\}$ ist, man kann analog zeigen, dass dann

$$c_{A_m}(am) = \begin{cases} f_{a+1} & \text{für alle } a \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ein anderes Argument für diesen Zusammenhang liefert die bereits bewiesene Aussage für den Fall $m = 1$: Jede Komposition von a mit Teilen in A_1 kann durch komponentenweise Multiplikation mit n mit einer Komposition von an mit Teilen in A_n identifiziert werden und umgekehrt.

Die ersten zwei natürlichen Zahlen lieferten eine Beziehung zu den Fibonacci-Zahlen. Es ist nicht vermessen, anzunehmen, dass für $A = \{1, 2, 3\}$ ein Zusammenhang zwischen $c_A(n)$ und den *Tribonacci*-Zahlen bestehen könnte. Wir berechnen direkt den allgemeineren Fall.

Satz 3. *Es sei $A := \{1, 2, 3, \ldots, m\}$ die Menge der ersten m natürlichen Zahlen. Dann gilt*

$$c_A(n) = \begin{cases} 2^{n-1} & \text{für alle } n \leq m, \\ \sum_{k=1}^{m} c_A(n-k) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Die Aussage ist nicht neu. Bereits bei Heubach und Mansour (2004) finden wir einen knappen Beweis dazu. Wir zeigen aber damit die Eleganz, die in Lemma 1 steckt:

$$1 + \sum_{n\geq 1} c_A(n)x^n = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^{m} x^k}.$$

Beim Umstellen und Ausrechnen nutzen wir die gleichen Techniken und verschieben die Indizes so, dass wir die Koeffizienten bis x^m separiert betrachten.

$$\begin{aligned}
1 &= \left(1 - \sum_{k=1}^{m} x^k\right) \cdot \left(1 + \sum_{n\geq 1} c_A(n)x^n\right) \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{m} x^k + \sum_{n\geq 1} c_A(n)x^n - \sum_{k=1}^{m}\sum_{n\geq 1} c_A(n)x^{n+k} \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{m} x^k + \sum_{n\geq 1} c_A(n)x^n - \sum_{k=1}^{m}\sum_{n\geq k+1} c_A(n-k)x^n \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{m} x^k + \sum_{n=1}^{m} c_A(n)x^n + \sum_{n\geq m+1} c_A(n)x^n - \sum_{k=1}^{m}\Big(\sum_{n=k+1}^{m} c_A(n-k)x^n + \sum_{n\geq m+1} c_A(n-k)x^n\Big) \\
&= 1 + \left(\sum_{n=1}^{m} c_A(n)x^n - \sum_{k=1}^{m} x^k - \sum_{k=1}^{m}\sum_{n=k+1}^{m} c_A(n-k)x^n\right) + \left(\sum_{n\geq m+1} c_A(n)x^n - \sum_{n\geq m+1}\sum_{k=1}^{m} c_A(n-k)x^n\right)
\end{aligned}$$

Nun arbeiten wir aus der ersten Klammer $c_A(n)$ für $n \leq m$ heraus und aus der zweiten Klammer entnehmen wir die Bedingung für alle $n > m$:

$$\Rightarrow 1 = 1 + \sum_{n=1}^{m}\left(\left(c_A(n) - 1 - \sum_{k=1}^{m-1} c_A(k)\right)x^n\right) + \sum_{n\geq m+1}\left(\left(c_A(n) - \sum_{k=1}^{m} c_A(n-k)\right)x^n\right)$$

Der Koeffizientenvergleich liefert, dass die inneren Klammern für jedes n null werden müssen und daraus folgt schon die Behauptung. $\square$

Bemerkung. Nun ist für den Fall $m = 3$ die Anzahl an Kompositionen $c_A(1) = 1, c_A(2) = 2, c_A(3) = 4$ und für $n \geq 4$ dann allgemein $c_A(n) = c_A(n-1) + c_A(n-2) + c_A(n-3)$. Damit ist also tatsächlich $c_A(n) = t_{n+2}$, wobei hier (t_i) die Folge der Tribonacci-Zahlen sei.

Außerdem können wir noch einen Schritt weiter verallgemeinern, da nun für jedes $a \in \mathbb{N}$ die Menge $A := \{a, 2a, \ldots, ma\}$ leicht zu untersuchen ist. Wir identifizieren einfach jede beliebige Komposition $(\lambda_i)_{i\leq k}$ von n mit Teilen in A mit einer Komposition $(\frac{1}{a}\lambda_i)_{i\leq k}$. Dies ist nun eine Komposition von $\frac{n}{a}$ mit Teilen in $B := \{1, 2, 3, \ldots, m\}$, und deren Anzahl haben wir bereits gezählt. Zusammengefasst ist

$$c_A(n) = \begin{cases} c_B(\frac{n}{a}) & \text{wenn } a|n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Eine andere Verallgemeinerung von Beispiel 2 ist der Fall $A = \{1, m\}$ für ein $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Auch hier ergibt sich eine schöne Lösung, auf die wir im nächsten Kapitel zurückgreifen werden.

Satz 4. *Für ein gegebenes $m \in \mathbb{N}$ mit $m > 1$ sei $A := \{1, m\}$. Dann ist $c_A(n) = 1$ für jedes $n < m$, außerdem ist $c_A(m) = 2$, und für größere n ist $c_A(n) = c_A(n-1) + c_A(n-m)$.*

Beweis. Die ersten m Fälle sind zwar leicht einzusehen, aber wir folgern trotzdem die ganze Aussage aus Lemma 1:

$$1 + \sum_{n\geq 1} c_A(n)x^n = \frac{1}{1-(x-x^m)}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow 1 &= (1-x-x^m)\left(1 + \sum_{n\geq 1} c_A(n)x^n\right) \\
&= 1 - x - x^m + \sum_{n\geq 1} c_A(n)x^n - \sum_{n\geq 2} c_A(n-1)x^n - \sum_{n\geq m+1} c_A(n-m)x^n \\
&= 1 - x - x^m + \sum_{n=1}^{m} c_A(n)x^n - \sum_{n=2}^{m} c_A(n-1)x^n \\
&\quad + \sum_{n\geq m+1} (c_A(n) - c_A(n-1) - c_A(n-m))x^n \\
&= 1 + (c_A(1)-1)x + \sum_{n=2}^{m-1} (c_A(n) - c_A(n-1))x^n + (c_A(m) - c_A(m-1) - 1)x^m \\
&\quad + \sum_{n\geq m+1} (c_A(n) - c_A(n-1) - c_A(n-m))x^n
\end{aligned}$$

Nun kann man die Werte wieder direkt ablesen: $c_A(1) = 1$, $c_A(n) = c_A(n-1) \forall 1 < n < m$, dann $c_A(m) = 1 + 1 = 2$ und schließlich $c_A(n) = c_A(n-1) + c_A(n-m)$ für $n > m$. $\square$

5.2 Arithmetische Folgen

Beispiel 3. Wählen wir für A die Menge der ungeraden Zahlen, also $A := \{2n+1, n \in \mathbb{N}\}$, dann erhalten wir $c_A(n)$ direkt aus dem Lemma:

$$\begin{aligned}1 + \sum_{n \geq 1} c_A(n) x^n = \frac{1}{1 - \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k+1}} = \frac{1}{1 - x \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (x^2)^k} &= \frac{1}{1 - x \cdot \frac{1}{1-x^2}} \\ &= \frac{1 - x^2}{1 - x - x^2}\end{aligned}$$

Nun lösen wir auf, indem wir ausmultiplizieren und dann die Summen mittels Indexverschiebung zusammenfassen:

$$\begin{aligned}1 - x^2 &= (1 - x - x^2) \cdot \left(1 + \sum_{n \geq 1} c_A(n) x^n\right) \\ &= 1 - x - x^2 + \sum_{n \geq 1} c_A(n) x^n - \sum_{n \geq 1} c_A(n) x^{n+1} - \sum_{n \geq 1} c_A(n) x^{n+2} \\ &= 1 - x - x^2 + \sum_{n \geq 1} c_A(n) x^n - \sum_{n \geq 2} c_A(n-1) x^n - \sum_{n \geq 3} c_A(n-2) x^n \\ &= 1 + (c_A(1) - 1)x + (c_A(2) - c_A(1) - 1)x^2 + \sum_{n \geq 3} (c_A(n) - c_A(n-1) - c_A(n-2)) x^n\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich führt dann direkt auf $c_A(1) = c_A(2) = 1$ und für $n \geq 3$ rekursiv auf $c_A(n) = c_A(n-1) + c_A(n-2)$. Knapp formuliert bedeutet das $c_A(n) = f_n$, wobei f_n wieder die $n-$te Fibonacci-Zahl ist.

Damit tritt diese legendäre Folge für endliche und unendliche A auf. Und wie im endlichen Fall auch können wir weiter verallgemeinern, um auch den Tribonacci- und Tetrabonacci-Zahlen gerecht zu werden. Wir müssen jedoch die Fragestellung neu denken. Sei dazu ab hier allgemein $\bar{A} := \mathbb{N} \setminus A$. Wir fragen also nicht mehr nach der Anzahl an Kompositionen, deren Teile in einer bestimmten Menge liegen, sondern wir fordern, dass die Teile eine ausgewählte Menge vermeiden. Natürlich lassen sich diese zwei Fragen ineinander überführen, wir haben zum Beispiel gerade nachgerechnet, dass $c_{\bar{A}}(n) = f_n$ ist, wenn wir A als die Menge der geraden Zahlen auffassen. Mit diesem neuen Ansatz gelingt dann auch die Verallgemeinerung:

Satz 5. *Für ein gegebenes $k \in \mathbb{N}$ sei $A := \{jk\colon j \in \mathbb{N}\}$. Dann berechnet sich die Anzahl der Kompositionen von n, deren Teile nicht in A liegen, zu*

$$c_{\bar{A}}(n) = \begin{cases} 2^{n-1} & \text{wenn } 1 \leq n \leq k-1, \\ 2^{n-1} - 1 & \text{wenn } n = k, \\ \sum_{i=1}^{k} c_{\bar{A}}(n-i) & \text{falls } n > k. \end{cases}$$

Der Beweis lässt sich, wie Beck und Robbins (2015) sogar für einen noch allgemeineren Fall gezeigt haben, analog zu den vorherigen führen. Wir möchten den Beweis aber aufschieben, bis wir später Lemma 2 gezeigt haben. Betrachten wir zunächst ein weiteres Mengenpaar, das eine Motivation für das neue Lemma liefern wird. Auch für die Menge aus Satz 4 existiert wie in der Einleitung beschrieben ein unendliches Gegenstück.

Beweis von Satz 1. Wir nutzen wieder Lemma 1, werden aber auch auf Satz 4 zurückgreifen. Es ist

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{n \geq 1} c_A(n) x^n = \frac{1}{1 - \sum_{k \geq m} x^m} &= \frac{1}{1 - \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k - \sum_{k=0}^{m-1} x^k\right)} \\ &= \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1-x^m}{1-x}\right)} \\ &= \frac{1-x}{1-x-x^m} \end{aligned}$$

Der Nenner dieser rationalen Funktion ist nun mit dem aus Satz 4 identisch. Wir machen uns diese Tatsache zunutze und erhalten

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 1 + \sum_{n \geq 1} c_A(n) x^n = 1 + \sum_{n \geq 1} c_B(n) x^n - x \cdot \left(1 + \sum_{n \geq 1} c_B(n) x^n\right) \\ &\Rightarrow 1 + \sum_{n \geq 1} c_A(n) x^n = 1 + (c_B(1) - 1)x + \sum_{n \geq 2} (c_B(n) - c_B(n-1)) x^n \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich liefert $c_A(1) = 1 - 1 = 0$, und für $n > 1$ ist $c_A(n) = c_B(n) - c_B(n-1)$, das bedeutet:

$$c_A(n) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } n < m, \\ 1 & \text{wenn } n = m, \\ c_B(n-m) & \text{falls } n > m. \end{cases}$$

□

Entscheidend für die Beziehung zwischen A und B war, dass die Nenner der rationalen Funktionen, mit denen wir die Erzeugendenfunktion identifizieren können, gleich sind. Der Zähler war statt 1 jedoch $1 - x$, dadurch sind die Folgen aber nur verschoben. Das wirft die Frage nach einer Generalisierung hinsichtlich des Zählers auf. Wie verändern sich die Folgen $(c_A(n))_{n\in\mathbb{N}}$, wenn an der rationalen Funktion der Zähler verändert wird? Das Lemma 2 beantwortet diese Frage möglichst allgemein.

Lemma 2. *Seien $A \subset \mathbb{N}$ und die zugehörigen $c_A(n)$ gegeben. Sei außerdem $p = \sum_{k=1}^{h} a_k x^k \in \mathbb{R}[x]$. Erfüllt nun B die Gleichung*

$$1 + \sum_{n\geq 1} c_B(n)x^n = \frac{1-p}{1-\sum_{m\in A} x^m}\ ,$$

dann folgt direkt

$$\begin{aligned}
\forall n \leq h\colon c_B(n) &= c_A(n) - a_n - \sum_{m=1}^{n-1} a_{n-m}c_A(m)\\
\forall n > h\colon c_B(n) &= c_A(n) - \sum_{m=1}^{h} a_m c_A(n-m)
\end{aligned}$$

Beweis. Es sind keine besonderen Ideen für den Beweis notwendig, wir müssen nur Lemma 1 ausnutzen und sorgfältig rechnen. Die Voraussetzung liefert dann direkt

$$\begin{aligned}
1 + \sum_{n\geq 1} c_B(n)x^n &= 1 + \sum_{n\geq 1} c_A(n)x^n - \sum_{k=1}^{h} a_k x^k \cdot \left(1 + \sum_{n\geq 1} c_A(n)x^n\right)\\
\Rightarrow 1 &= 1 + \sum_{n\geq 1} c_B(n)x^n - \sum_{n\geq 1} c_A(n)x^n + \sum_{k=1}^{h} a_k x^k + \sum_{k=1}^{h} a_k x^k \cdot \sum_{n\geq 1} c_A(n)x^n\\
&= 1 + \sum_{n\geq 1} c_B(n)x^n - \sum_{n\geq 1} c_A(n)x^n + \sum_{k=1}^{h} a_k x^k\\
&\quad + \sum_{n=2}^{h}\sum_{m=n}^{h} a_{n-1}c_A(m+1-n)x^m + \sum_{n=h+1}^{\infty}\left(x^n \sum_{m=1}^{h} a_m c_A(n-m)\right)\\
&= 1 + \sum_{n=2}^{h}(c_B(n) - c_A(n) + a_n)x^n + \sum_{n=2}^{h}\sum_{m=n}^{h} a_{n-1}c_A(m+1-n)x^m\\
&\quad + \sum_{n=h+1}^{\infty}\left(c_B(n) - c_A(n) + \sum_{m=1}^{h} a_m c_A(n-m)\right)x^n \qquad (5.1)
\end{aligned}$$

Für $n > h$ haben wir die Koeffizienten damit schon in eine anschauliche Form gebracht. Um auch die kleineren Potenzen auswerten zu können, müssen wir die Reihenfolge der Summation in der Doppelsumme ändern, dann ist

$$\sum_{n=2}^{h}\sum_{m=n}^{h} a_{n-1}c_A(m+1-n)x^m = \sum_{n=2}^{h} x^n \sum_{m=1}^{n-1} a_{n-m}c_A(m).$$

Setzten wir das in Gleichung (5.1) ein, erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}1 = 1 &+ \sum_{n=2}^{h}\left(c_B(n)-c_A(n)+a_n+\sum_{m=1}^{n-1}a_{n-m}c_A(m)\right)x^n \\ &+ \sum_{n=h+1}^{\infty}\left(c_B(n)-c_A(n)+\sum_{m=1}^{h}a_m c_A(n-m)\right)x^n.\end{aligned}$$

Damit folgt dann die Behauptung. □

Dieses neue Lemma kann dabei helfen, unterschiedliche Mengen zu finden, für die sich das Wachstum der Anzahl an Kompositionen ähnlich oder identisch verhält. Außerdem können wir Behauptungen wie die aus Satz 5 problemlos beweisen.

Beweis von Satz 5. Für ein gegebenes $k \in \mathbb{N}$ und $B = \{jk : j \in \mathbb{N}\}$ ist nach Lemma 1

$$\begin{aligned}1+\sum_{n\geq 1} c_{\bar{B}}(n) &= \frac{1}{1-\sum_{m\notin B} x^m} \\ &= \frac{1}{1-\left(\sum_{m\in\mathbb{N}} x^m - \sum_{m\in B} x^m\right)} \\ &= \frac{1}{1-\left(\frac{1}{1-x} - \sum_{m\in N}(x^k)^m\right)} \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-x^k}} \\ &= \frac{1-x^k}{1-\sum_{m=1}^{k} x^m} \\ &= \frac{1-x^k}{1-\sum_{m\in A} x^m}.\end{aligned}$$

Für den letzten Schritt ist $A := \{1,2,\ldots,m\}$. Nach Satz 3 sind die Werte $c_A(n)$ bekannt. Nun liefert Lemma 2 direkt

$$c_B(n) = \begin{cases} c_A(n) & \text{wenn} 1 \leq n \leq k-1, \\ c_A(n)-1 & \text{wenn } n = k, \\ c_A(n)-c_A(n-k) & \text{falls } n > k. \end{cases}$$

und damit ist der Satz gezeigt. □

6 Ein algorithmischer Ansatz

Zusammengefasst hat sich gezeigt, dass Lemma 1 ein unerlässliches Werkzeug ist, um die Anzahl an Kompositionen über beliebigen Mengen zu studieren. Es zeigt uns, dass die eigentliche Berechnung eines $c_A(n)$ durch Invertierung einer Erzeugendenfunktion gelingt. Der Beweis von Präposition 1 wiederum zeigt, wie sich so eine inverse Funktion berechnen lässt: *Rekursiv*. Das ist für einen numerischen Algorithmus hervorragend, da wir in der Praxis selten für jedes $n \in \mathbb{N}$ an $c_A(n)$ interessiert sind. Stattdessen genügt es beispielsweise, die ersten hundert oder tausend Werte zu kennen, und dafür müssen wir auch nur diese berechnen. Eine andere, leicht einzusehende Idee ist, dass wir auch nur die Elemente $a \in A$ benötigen, für die $a \leq n$ gilt. Da das jedoch eine der Grundlagen für den algorithmischen Ansatz ist, formalisieren wir diese Idee konkret:

Präposition 4. *Gegeben seien eine Menge natürlicher Zahlen A und die zugehörigen Werte $c_A(n)$. Mit $A_n := A \cap \{1, 2, \ldots, n\}$ folgt dann*

$$c_A(n) = c_{A_n}(n) \; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest. Wegen $A_n \subset A$ ist jede Komposition von n mit Teilen in A_n auch eine mit Teilen in A. Damit folgt schon $c_{A_n}(n) \leq c_A(n)$. Angenommen, das wäre eine echte Ungleichung, also $c_{A_n}(n) < c_A(n)$, dann gäbe es ein $k \in \mathbb{N}$ und eine Komposition $(\lambda_i)_{i \leq k}$ von n mit Teilen in A, aber nicht in A_n, also gäbe es insbesondere ein $\lambda_i \in A$ mit $\lambda_i \notin A_n$. Dann ist $\lambda_i > n$, und weil alle Summanden positiv sind, folgt dann $\sum_{i=1}^{k} \lambda_k > n$. □

Präposition 4 erlaubt es, unendliche Mengen A durch endliche Teilmengen zu ersetzen, sobald wir nur an endlich vielen Werten von $c_A(n)$ interessiert sind. Ein Algorithmus, der sich diese Eigenschaften zunutze macht, ist ausführlich kommentiert im Anhang hinterlegt. Vorteilhaft für die Laufzeit ist, dass wir immer nur mit einem Polynom arbeiten müssen, dessen Koeffizienten $a_i \in \{0, -1\}$ sind. Die für Python verfasste Funktion gibt daher nicht nur für ein spezifisches $n \in \mathbb{N}$ den Wert $c_A(n)$ aus, sondern liefert die Werte für jedes $m \leq n$. Außerdem ist ein kleiner Graph eingefügt, der das Wachstum von $c_A(n)$ abhängig von n darstellt. Dadurch kann man sich schnell einen Überblick verschaffen, für welche natürlichen Zahlen bei gegebenem $A \subset \mathbb{N}$ überhaupt Kompositionen existieren. Es sind aber viele Alternativen denkbar, in denen das Programm in abgewandelter Form und auf individuelle Zwecke zugeschnitten zum Einsatz kommen könnte. An dieser Stelle sollte nur aufgezeigt werden, wie das Problem algorithmisch einfach umgesetzt werden kann. Zusammen mit den theoretischen Erkenntnissen aus den vorherigen Kapiteln können damit in Zukunft neue kombinatorische Identitäten aufgedeckt und nachgewiesen werden.

Literatur

Alladi, Krishnaswami und V. E. Hoggatt (1975). »Compositions with Ones and Twos«. In: *Fibonacci Quarterly* 13.3, S. 233–239.

Andrews, George E. (1998). *The Theory of Partitions*. Cambridge University Press.

Andrica, Dorin und Ovidiu Bagdasar (2020). »Generating Functions«. In: *Recurrent Sequences: Key Results, Applications, and Problems*. Cham: Springer International Publishing, S. 105–134. ISBN: 978-3-030-51502-7. DOI: `10.1007/978-3-030-51502-7_4`. URL: `https://doi.org/10.1007/978-3-030-51502-7_4`.

Beck, Matthias und Neville Robbins (2015). »Variations on a Generating-Function theme: Enumerating compositions with parts avoiding an arithmetic sequence«. In: *American Mathematical Monthly 122, 256-263*. arXiv: `1403.0665 [math.NT]`.

Beutelspacher, Albrecht (2018). »Polynome«. In: *Zahlen, Formeln, Gleichungen: Algebra für Studium und Unterricht*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden, S. 185–219. ISBN: 978-3-658-16106-4. DOI: `10.1007/978-3-658-16106-4_6`. URL: `https://doi.org/10.1007/978-3-658-16106-4_6`.

Carlitz, Leonard (1976). »Restricted compositions«. In: *Fibonacci Quarterly* 14.3, S. 254–264.

Eger, Steffen (2013). »Restricted weighted integer compositions and extended binomial coefficients«. In: *Journal of Integer Sequences* 16.13.1, S. 3.

Euler, Leonhard (1753). »De partitione numerorum«. In: *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*, S. 125–169.

Feller, William (1968). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. 3. Aufl. Bd. 1. John Wiley & Sons Inc.

Hardy, Godfrey H. und Srinivasa Ramanujan (1918). »Asymptotic formulaæ in combinatory analysis«. In: *Proceedings of the London Mathematical Society* 2.1, S. 75–115.

Heubach, Silvia und Toufik Mansour (2004). »Compositions of n with parts in a set«. In: *Congressus Numerantium* 168, S. 127–143. ISSN: 0384-9864.

– (2009). *Combinatorics of Compositions and Words*. CRC Press.

Hoggatt, V. E. und Marjorie Bicknell (1975). »Palindromic compositions«. In: *Fibonacci Quarterly* 13.4, S. 350–356.

Hoggatt, V. E. und D. A. Lind (1968). »Fibonacci and binomial properties of weighted compositions«. In: *Journal of Combinatorial Theory* 4.2, S. 121–124. ISSN: 0021-9800. DOI: https://doi.org/10.1016/S0021-9800(68)80037-7. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021980068800377.

Just, Matthew (2021). »Compositions that are palindromic modulo m«. In: *arXiv preprint*. arXiv: 2102.00996.

Moser, Leo und Eoin L. Whitney (1961). »Weighted compositions«. In: *Canadian Mathematical Bulletin* 4.1, S. 39–43.

Stanley, Richard P. (2011). »Rational Generating Functions«. In: *Enumerative Combinatorics*. 2. Aufl. Bd. 1. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, S. 464–570. DOI: 10.1017/CBO9781139058520.005.

Steger, Angelika (2007). *Diskrete Strukturen: Band 1: Kombinatorik, Graphentheorie, Algebra*. Springer-Verlag.

```
# Die unten definierte Funktion 'Kompositionen' zählt für die ersten n natürlichen Zahlen,
# wie viele Kompositionen von n es gibt, deren Teile in einer Menge A liegen.
# Die notwendigen Eingaben sind daher die Zahl n und eine Liste, in der die Elemente von A
# in beliebiger Reihenfolge eingetragen werden. Die Ausgabe erfolgt dann als Liste, aber es
# wird auch ein kleiner plot angezeigt.
# ______________________________________________
#

def Kompositionen(n,A):
    import matplotlib.pyplot as plt      # notwendiges Paket für den plot
    Y=[0]*(1+max(A))
    Y[0]=1                               # Y bekommt jetzt das Format [1,0,-1,-1,0,...]
    for i in range(len(A)):
        Y[A[i]]=-1                       # Jetzt ist Y die Folge, deren Erzeugendenfunktion
                                         # invertiert werden soll.
    B = [1]                              # B wird die Liste, mit den Kompositionszahlen.
    while len(Y)<= n:
        Y.append(0)                      # Die Länge von Y muss ggf. angepasst werden.
    for i in range(1, n+1):              # Hier beginnt die mathematische Berechnung des Inversen.
        platzhalter = 0
        for k in range (1, i+1):
            platzhalter = platzhalter - Y[k]*B[i-k]
        B.append(platzhalter)            # Hier wird B rekursiv aufgefüllt.
    X= list(range(n+1))                  # X entspricht der X-Achse im Plot.
    plt.plot(X,B)                        # Der Plot wird ausgeführt
    plt.show()                           # und angezeigt!
    return B                             # Die Anzahl an Kompositionen wird als Liste ausgegeben.
```