Freie Universität Berlin

Fachbereich Mathematik und Informatik

Bachelorarbeit

Sommersemester 2021

Übergangsmatrizen der schriftlichen Addition und der Satz von Perron-Frobenius

---

Verfasserin

Julia Klose - 5189260 - julia.klose@fu-berlin.de

Gutachter

Prof. Matthias Beck
Dr. Jean-Philippe Labbé

Abgabe

19. Oktober 2021

Eidesstattliche Erklärung

Name: Klose
Vorname: Julia
Geboren am: 10.04.1998
Matrikelnummer: 5189260

Ich erkläre gegenüber der Freien Universität Berlin, dass ich die vorliegende Bachelorarbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.
Alle Ausführungen, die inhaltich oder wörtlich aus anderen Schriften entnommen sind, habe ich als solche kenntlich gemacht.
Die Arbeit wurde in gleicher oder ähnlicher Form noch bei keiner anderen Universität als Prüfungsleistung eingereicht.

Berlin, 19.10.2021 | Julia Klose
Ort, Datum | Unterschrift

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die vorliegende Bachelorarbeit ist in zwei Teile aufgeteilt. Der erste Teil beschäftigt sich mit dem Satz von Perron-Frobenius, und der zweite Teil behandelt die Übergangsmatrizen der schriftlichen Addition.
Der Satz von Perron-Frobenius geht zurück auf die gleichnamigen deutschen Mathematiker. Etwas genauer schauen wir uns zwei Anwendungsbeispiele aus dem sportlichen Bereich an (siehe Kapitel 2.1). Unter anderem analysieren wir die Bundesligasaison 2020/21 und erstellen mithilfe des Satzes von Perron-Frobenius eine neue Rankingliste (vgl. Tabelle 2) auf. Aber auch die National Football League Saison aus dem Jahr 2007 schauen wir uns genauer an.
Ausgangspunkt für den zweiten Teil ist die schriftliche Addition. Die schriftliche Addition dient als Anschauungsbeispiel und zieht sich durch die Kapitel wie ein roter Faden. Jedem Kind wird im Grundschulalter beigebracht, wie man Zahlen schriftlich schnell addiert. Dabei stellt man fest, wie einfach die schrifltiche Addition auf den ersten Blick ist. Aber da täuscht man sich, denn es gibt weit mehr zu entdecken.
Wer sich jetzt denkt, dass beide Kapitel getrennt voneinader existieren können, liegt nicht ganz richtig. Beide Kapitel sind miteinander verbunden, und dies wird deutlich, wenn man sich mit Satz 6 beschäftigt. Dieser Satz stammt aus dem zweiten Teil, wird allerdings mithilfe vom Satz von Perron-Frobenius bewiesen. Die Anwendung des Satzes liefert die Wahrscheinlichkeit für einen bestimmten Übertrag k bei der Addition von m zu addierenden Zahlen.
Wir starten deshalb im Kapitel 3 zuerst einmal mit den Überträgen der schriftlichen Addition. Hierbei können wir feststellen, dass sich die Reihe der Überträge wie eine Markov-Kette (vgl. Definition 3) verhält. Das heißt, ein Übertrag wird nur durch seinen direkten Vorgänger mitbestimmt. Man kann das auch wie folgt formulieren:

> Die Zukunft des Systems hängt nur von der Gegenwart und nicht von der Vergangenheit ab.[HLNS78, S. 18]

Wir stellen darüberhinaus fest, dass man schon im Vorfeld sagen kann, wie groß der höchste Übertrag ist. Dafür muss man sich nur anschauen, wie viele Zahlenreihen man insgesamt addiert (vgl. Lemma 3.1).
Im Kapitel 4 schauen wir uns die entstehende Übergangsmatrix an. Die Übergangsmatrix (vgl. Definition 6) ist in diesem Fall eine Veranschaulichung aller (bedingten) Wahrscheinlichkeiten, die bei den verschiedenen Kombinationsmöglichkeiten der Überträge entstehen können.
Direkt im Anschluss folgt ein Kapitel zu den Eigenwerten und Eigenvektoren der Übergangsmatrix (Kapitel 5). Dabei nehmen wir immer wieder Bezug auf die Erkenntnisse von John Holte [Hol97]. Die Eigenwerte folgen dem Muster: $1, 10^{-1}, 10^{-2}, \ldots$ (siehe Satz 3). Bei genauerer Analyse der Eigenvektoren lässt sich feststellen, dass man die Eigenvektoren analog zu der Übergangsmatrix in einer Matrix (vgl. Definition 8) verpacken kann. Hierbei erkennt man, dass einige Zeilen eine Parallele zum Pascal'schen Dreieck (vgl. Satz 5) und den Euler-Zahlen (vgl. Korollar 2) aufweisen. Aber auch bei den Spalten kann man ein Muster erkennen, wenn man sich z.B. die Einträge der ersten oder letzten Spalte (vgl. Korollar 3 und 4) jeweils anschaut.

Ganz am Ende der Arbeit befindet sich ein Kapitel mit einem kleinen Ausblick. Dort wird noch einmal verdeutlicht, wo ein paar der erwähnten Themen ihre Anwendung in unserem Alltag finden. Ein ganz großes Beispiel ist dabei die Suchmaschine Google. Wer sich fragt, wie Google es schafft, dass "manchmal" die beste Seite als erstes angezeigt wird, findet hier mithilfe des Satzes von Perron-Frobenius eine Antwort. Aber auch in anderen alltäglichen Situationen können wir z.B. die Markov-Ketten wiederfinden (vgl. Abschnitt 2.1).

2 Satz von Perron und Frobenius

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit dem Satz von Perron-Frobenius und zwei dazugehörigen Anwendungen (siehe Abschnitt 2.1). Der Satz geht zurück auf die beiden deutschen Mathematiker Oskar Perron (1880-1975) und Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917). Oskar Perron hat dabei zuerst den Spezialfall für positive Matrizen formuliert, und Georg Frobenius hat den Satz dann für nichtnegative Matrizen verallgemeinert [HW06]. Dabei sind nichtnegative Zahlen, alle Zahlen größer oder gleich Null. Bevor wir zu dem Satz der beiden Mathematiker kommen, müssen wir zunächst noch ein wichtiges Element definieren.

Definition 1 (Spektralradius [HW06, Kapitel 6.2])**.** *Wir definieren den Spektralradius $\rho(A)$ einer quadratischen Matrix A durch*

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \textit{ ist ein Eigenwert von } A\}.$$

Satz 1 (Satz von Perron-Frobenius siehe z.B. [HW06])**.** *Sei $A = (a_{i,j})$ eine nichtnegative $m \times m$ Matrix (daher $a_{i,j} \geq 0$), dann gilt:*

- *$\rho(A)$ ist ein Eigenwert von A.*
- *Wenn $a_{i,j} > 0$, so gibt es einen rechten positven Eigenvektor v von A. Dieser Vektor v ist komponentenweise $v_x > 0$ für $0 \leq x \leq m$ und es gilt Av = $\rho(A)v$.*
- *Es einen Eigenvektor v, der nicht der Nullvektor ist und für den ebenfalls gilt, dass er komponentenweise $v \geq 0$ mit $Av = \rho(A)v$.*

Bemerkung 1. *Analog zu dem rechten Eigenvektor v von A existiert ein linker Eigenvektor w von A. Für diesen Vektor w mit $w_x > 0$ für $0 \leq x \leq m$ gilt $w^T A$ = $w\rho(A)$.*

Definition 2. *Als Perron-Vektor bezeichnet man einen nichtnegativen Eigenvektor. Dieser Eigenvektor gehört zu dem betragsmäßig größten Eigenwert, dem Spektralradius.*

2.1 Die Anwendung vom Satz von Perron-Frobenius

Häufig findet der Satz von Perron-Frobenius eine Anwendung im Sport, genauer gesagt, wenn man unterschiedliche Mannschaften vergleichen oder ein Ranking aufstellen möchte. Den ersten Zusammenhang zwischen der Ranking-Problematik und dem Satz von Perron-Frobenius hat James P. Keener (1993) festgestellt [Wer, S. 232].
Nun kommen wir zum eigentlichen Beispiel. Wir werden unterschiedliche Sportmannschaften vergleichen und ein Ranking aufstellen. Der Startpunkt dafür ist der folgende:

Beispiel 1 (NFL)**.** *Wir haben sechs Mannschaften der National Football League (NFL) 2007 zur Auswahl. In unserem Fall sind das die folgenden Mannschaften:*

- *Caroline Panthers (C)*
- *Dallas Cowboys (D)*
- *Houston Texans (T)*
- *New Orleans Saints (O)*

- *Philadelphia Eagels (P)*
- *Washington Redskins (W)*

Insgesamt gab es zwischen den sechs Mannschaften 2007 genau 12 Spiele. Einige Mannschaften haben doppelt gegeneinander gespielt (C - O; D - P; D - W; P - W) und andere wiederum nicht. Es gibt aber auch Mannschaften, die gar nicht gegeneinander gespielt haben. Dadurch ergibt sich für die NFL-Saison 2007 dann die Spielergebnistabelle in Tabelle 1.

Tabelle 1: Die Spielergebnisse der National Football League der Saison 2007 [Wer].

Spielpaarung	Spielergebnis
T - C	34 - 21
C - O	16 - 13
O - C	31 - 6
D - C	20 - 13
D - P	38 - 17
P - D	10 - 6
D - W	6 - 27
W - D	23 - 28
O - T	10 - 23
P - O	38 - 23
P - W	33 - 25
W - P	20 - 12

Nun müssen wir noch die nichtnegative Bewertungsmatrix A aufstellen. Die Matrixeinträge $a_{i,j}$ sind dabei wie folgt definiert: Wir nehmen die Anzahl der gewonnenen Spiele der Mannschaft i gegenüber der Mannschaft j und teilen sie durch die Anzahl der absolvierten Spiele der Mannschaft i. Je größer dabei ein Matrixeintrag ist, desto erfolgreicher war die Mannschaft i gegenüber Mannschaft j.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.2 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0.25 & 0 \end{pmatrix}.$$

Am Beispiel der Houston Texans (T) und der Caroline Panthers (C) ergibt sich somit der Eintrag $a_{3,1} = 0.5$. Aus Tabelle 1 lässt sich erkennen, dass die Houston Texans zwei Spiele bestritten und beide gewonnen haben. Davon wurde ein Spiel gegen die Caroline Panthers (C) erfolgreich abgeschlossen. Alle weiteren Spielergebnisse der Mannschaften befinden sich analog zum ausgeführten Beispiel in der oberen Bewertungsmatrix A.
Nun berechnen wir die entsprechenden Eigenwerte der Matrix A. Insgesamt erhalten wir sechs verschiedene Eigenwerte (siehe Anhang). Durch den Satz von Perron-Frobenius wissen wir, dass wir den betragsmäßig größten Eigenwert nehmen müssen, um den anschließenden Perron-Vektor daraus zu ermitteln. Der Spektralradius $\rho(A)$ ist in diesem Fall 0.4317.
Zu dem Eigenwert $\rho(A) = 0.4317$ berechnet das Programm MATLAB [Mat21] den normierten

Eigenvektor der Länge 1 *der Form:*

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5470 \\ 0 \\ 0 \\ 0.5470 \\ 0.6336 \end{pmatrix}.$$

Mithilfe des errechneten Vektors v erhalten wir dann in Verbindung mit der Bewertungsmatrix A das folgende Ranking für die NFL Saison 2007, indem wir die erhaltenen Einträge des Eigenvektors der Größe nach absteigend ordnen. Die nichtnegative Zahl des Perron-Vektors v_i gibt den Wert einer Mannschaft i an. Somit kann aus der Ungleichung $v_i > v_k$ gesagt werden, dass die Mannschaft i stärker gespielt hat als die Mannschaft k. Somit liefert der größte Eintrag den ersten Platz. Den zweiten Platz teilen sich die Philadelphia Eagles (P) und die Dallas Cowboys (D). Den dritten Platz teilen sich die drei Mannschaften Houston Texans (T), New Orleans Saints (O) und Carolina Panthers (C):

1. Washington Redskins (W)
2. Philadelphia Eagles (P)
2. Dallas Cowboys (D)
3. Houston Texans (T)
3. New Orleans Saints (O)
3. Carolina Panthers (C)

Ein anderes Beispiel bietet die deutsche Fußball-Bundesliga. Die Bundesligaergebnisse wurden `https://www.kicker.de/bundesliga/tabelle/2020-21` entnommen. Mithilfe des Satzes von Perron-Frobenius kann man die entstehende Fußballbundesligatabelle nochmal mit anderen Kriterien bewerten. Man schaut sich zum Beispiel an, gegen wen eine Mannschaft gewonnen oder verloren hat. Darüber hinaus kann man dann sagen, ob eine Mannschaft vielleicht nur gegen schlechte Mannschaften Punkte erzielt hat. Die Bewertungsmatrix B für die Fußballbundesliga wurde dabei unter folgendem Punkt angelegt: Für die einzelnen Einträge $b_{i,j}$ gilt das Punktesystem der Bundeliga (siehe unten). Zudem spielt in der Fußballbundesliga jede Mannschaft genau zweimal gegeneinander (Hin- und Rückspiel), und das ist der entscheidende Unterschied zur NFL. Die einzelnen Einträge müssen nicht nochmal durch die Anzahl der gesamten Spiele geteilt werden.

Beispiel 2 (deutsche Fußballbundesliga)**.** *Analog zur NFL kann man auch hier wieder eine Bewertungsmatrix B aufstellen. Die Einträge enstehen aus dem bestehenden Bundesligasytem unter Verwendung der Kreuztabelle `https://www.kicker.de/bundesliga/kreuztabelle/2020-21`. Ein Sieg ergibt drei Punkte, eine Niederlage keinen Punkt, und ein Unentschieden liefert einen Punkt. Die Punkte der jeweiligen Mannschaften aus den Hin- und Rückspielen wurden dabei addiert und befinden sich als Einträge in der folgenden Matrix B.*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 & 6 & 3 & 6 & 2 & 3 & 6 & 4 & 3 & 3 & 6 & 6 & 4 & 6 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 4 & 3 & 3 & 6 & 6 & 4 & 3 & 6 & 6 & 6 & 1 & 6 & 6 \\ 0 & 6 & 0 & 6 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 3 & 6 & 6 & 1 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 4 & 4 & 2 & 6 & 4 & 3 & 3 & 4 & 4 & 6 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 0 & 3 & 4 & 1 & 2 & 4 & 6 & 4 & 6 & 6 & 4 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 6 & 4 & 3 & 4 & 4 & 4 & 1 & 3 & 6 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 1 & 4 & 0 & 2 & 4 & 4 & 4 & 3 & 0 & 1 & 4 & 6 & 6 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 4 & 0 & 3 & 1 & 2 & 6 & 3 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 4 & 6 & 6 & 4 & 0 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 6 & 0 & 4 & 0 & 4 & 3 & 3 & 6 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 & 6 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 & 6 & 2 & 6 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 3 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 & 6 & 4 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 6 & 4 & 0 & 1 & 3 & 6 & 0 & 0 & 4 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 4 & 2 & 1 & 3 & 0 & 2 & 6 & 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 6 & 3 & 2 & 4 & 1 & 4 & 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 2 & 3 & 0 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 3 & 3 & 6 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Unter Verwendung des Programms MATLAB [Mat21] wird der Spektralradius $\rho(B) = 41.9182$ ermittelt. Nun lassen wir den dazugehörigen normierten Eigenvektor noch ausrechnen. Der normierte Vektor, der Perron-Vektor, befindet sich als gesonderte Spalte in der Tabelle 2.

Tabelle 2: Die Rankingtabelle der Fußballbundesligaergebnisse für die Saison 2020/2021.

Punkte	Platz	Mannschaft	Perron-Vektor	Perron-Platzierung
78	1	Bayern München	0.3904	1
65	2	RB Leipzig	0.2979	4
64	3	Borussia Dortmund	0.3069	2
61	4	VfL Wolfsburg	0.2775	5
60	5	Eintracht Frankfurt	0.3067	3
52	6	Bayer 04 Leverkusen	0.2475	7
50	7	1. FC Union Berlin	0.2518	6
49	8	Bor. Mönchengladbach	0.2439	8
45	9	VfB Stuttgart	0.2068	11
45	10	SC Freiburg	0.2060	12
43	11	TSG Hoffenheim	0.2094	10
39	12	1. FSV Mainz 05	0.2115	9
36	13	FC Augsburg	0.1827	13
35	14	Hertha BSC	0.1556	16
35	15	Arminia Bielefeld	0.1577	15
33	16	1. FC Köln	0.1599	14
31	17	Werder Bremen	0.1429	17
16	18	FC Schalke 04	0.0848	18

Beim Vergleich der zweiten und der letzten Spalte aus der Tabelle 2 sind einige Unterschiede festzustellen. Nur bei fünf Mannschaften (1, 8, 13, 15, 17, 18) stimmen die Platzierungen aus Perron-Vektor und Bundesligatabelle überein. Hervorzuheben sind allerdings z.B. die Mannschaften Frankfurt, Mainz und Köln. Diese drei Mannschaften

haben einen Platz weiter oben im Perron-Ranking erzielt. Das liegt daran, dass Frankfurt auch Spiele gegen die oberen Mannschaften (München, Dortmund, Wolfsburg und Leipzig) gewonnen hat, Köln öfters ein Unentschieden gegen die oberen Mannschaften erzielt hat und Mainz einen Sieg gegen Leipzig und München verbuchen konnte. Das heißt also, dass vermeintlich schwächere Mannschaften Punkte gegen stärkere Mannschaften erzielt haben und genau das spiegelt die Perron-Platzierung wider. Für die Zukunft sollte man sich also nicht immer nur auf die Bundesligatabelle verlassen, wenn man überprüfen möchte, wie gut oder schlecht sein Lieblingsverein gespielt hat. Zusammengefasst kann man nochmal sagen, dass ein Ranking, das mithilfe des Perron-Vektors und einer entsprechenden Bewertungsmatrix aufgestellt wurde, besser ist als ein herkömmliches Ranking. Im Vergleich zum normalen Punkte-Ranking der Bundesliga bewertet das Perron-Ranking die Spielstärke einer Mannschaft. Das heißt, Mannschaften, die Punkte gegen starke Mannschaften erzielt haben, werden besser belohnt als Mannschaften, die Punkte gegenüber schwachen Mannschaften erzielt haben. Ob sich das Perron-Ranking gegenüber dem normalen Punkte-Ranking durchsetzen kann, bleibt allerdings offen.
Zusammengefasst wurde das Ranking für zwei verschiedene Sportarten durch den Satz von Perron-Frobenius (vgl. Satz 1) aufgestellt. Für das Aufstellen des Rankings spielte der Eigenvektor zum größten Eigenwert eine zentrale Rolle. Dieser wurde bereits in Kapitel 2 als Perron-Vektor definiert. Doch nicht nur bei dem Ranking verschiedener Mannschaften findet der Satz von Perron-Frobenius eine Anwendung. Wie in der Einleitung beschrieben, findet der Satz auch eine Anwendung bei der schriftlichen Addition. Daher werden wir uns im nächsten Kapitel mit der schriftlichen Addition genauer beschäftigen.

3 Die Überträge der schriftlichen Addition

Die schriftliche Addition ist vielen Menschen bestimmt noch ein Begriff, wenn man sich an die Anfänge der Mathematik in der Grundschulzeit zurückerinnert. Wie entstehen die Übertragszahlen, und von welchen Faktoren werden sie beeinflusst? Zunächst betrachten wir die bei der schriftlichen Addition entstehenden Überträge anhand einiger Beispiele.
Bei der schriftlichen Addition schreibt man die zu addierenden Zahlen übereinander und addiert die Ziffern dann spaltenweise. Sollte die Summe größer als neun sein, notiert man sich den Zehner als zusätzliche Ziffer in der nächsten (linken) Spalte. Diese zusätzliche Zahl bezeichnet man als Übertrag (im Englischen: carry). Die Einerstelle schreibt man unter den Bruchstrich der jeweilgen Spalte. In der Mathematik findet man dabei häufig noch die beiden Begriffe carry-in und carry-out. Unter carry-in versteht man den Übertrag, den wir aus der vorherigen Spalte mit in die aktuelle Spalte nehmen, und als carry-out bezeichnet man den Übertrag, den wir aus unserer aktuellen Spalte mit in die nächste Spalte nehmen.

Tabelle 3: Ein Beispiel für die schriftliche Addition von 2 Zahlen mit der Länge 50.

1	**11001**	**00001**	**11010**	**11111**	**10110**	**01101**	**11101**	**00011**	**10110**	**1101**
	48303	95306	43157	45529	83757	08961	55797	26078	83869	09808
	54770	91680	88934	05675	48049	70185	88981	80117	57091	46486
1	03074	86987	32091	51205	31806	79147	44779	06196	40960	56294

Bei der Addition in Tabelle 3 von zwei Zahlen der Länge 50 entsteht 31-mal der Übertrag 1 und 19-mal der Übertrag 0. So liegt die relative Häufigkeit, einen Übertrag der Zahl 1 zu erhalten, bei ca. 60%, und für den Übertrag 0 erhalten wir eine relative Häufigkeit von ca. 40%. Laut [Hol97] liegt die exakte Wahrscheinlichkeit, einen Übertrag von 1 bei der Addition von zwei Zahlen der Länge n zu erhalten, bei 50%.

Tabelle 4: Ein Beispiel für die schriftliche Addition von 3 Zahlen mit der Länge 50.

1	**01001**	**01102**	**11211**	**00120**	**12111**	**11111**	**11112**	**11111**	**01100**	**1110**
	90721	46662	25992	81298	23930	58783	46648	66552	70340	08044
	34641	01081	84392	25444	01966	07304	82625	84873	65952	01840
	11013	81402	95398	13008	34283	50676	25670	87507	01423	43370
1	36376	29147	05783	19750	60180	16764	54945	38932	37715	53254

Bei der Addition in Tabelle 4 von drei Zahlen der Länge 50 entsteht 33-mal der Übertrag 1, fünfmal der Übertrag der 2 und 12-mal der Übertrag 0. So liegt die relative Häufigkeit für einen Übertrag der 1 bei 66%, für den Übertrag 2 bei 10%, und für den Übertrag 0 erhalten wir die relative Häufigkeit von 24%.
Der Grund für diese Tendenz für den Übertrag der Zahl 1 ist der folgende: Um den Übertrag der Zahl 1 zu erzeugen, benötigt man in der Addition ein Ergebnis zwischen 10 und 19. Es gibt deutlich mehr Kombinationsmöglichkeiten für eine Zahl zwischen 10 und 19 als für Zahlen, die den Übertrag von 0 oder 2 erzeugen. Laut [Hol97] liegt die exakte Wahrscheinlichkeit für einen Übertrag von 1 bei ca. 66%, für die Überträge 0 und 2 liegt die Wahrscheinlichkeit je bei ca. 16%.

Verallgemeinert man die obigen Beispiele für die Addition von zwei bzw. drei Zahlen der Länge n auf endlich viele m Zahlen der Länge n, ergibt sich das Schema in Tabelle 5.

Tabelle 5: Das Prinzip der schriftlichen Addition von m Zahlen mit der Länge n.

Carries	$\mathbf{C}_n$	$\mathbf{C}_{n-1}$	$\mathbf{C}_{n-2}$	$\mathbf{\ldots}$	$\mathbf{C}_2$	$\mathbf{C}_1$	$\mathbf{C}_0$
Summanden		$X_{1,n-1}$	$X_{1,n-2}$	$\ldots$	$X_{1,2}$	$X_{1,1}$	$X_{1,0}$
		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$+$	$X_{m,n-1}$	$X_{m,n-2}$	$\ldots$	$X_{m,2}$	$X_{m,1}$	$X_{m,0}$
Summe	S_n	S_{n-1}	S_{n-2}	$\ldots$	S_2	S_1	S_0

Bemerkung 2. *Es gilt stets: $C_0 = 0$. Wir haben keine Spalte rechts von C_0, daher kann es keinen Übertrag geben und dementsprechend ist kein carry-in vorhanden.*

Die einzelnen Spalten kann man sich mithilfe von Markov-Ketten vorstellen. Diese sind wie folgt definiert, siehe z.B. [HLNS78].

Definition 3 (Markov-Kette). *Sei Y_k eine Folge von verschiedenen Zufallsvariablen. Diese Folge formt eine Markov-Kette, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:*

$$P = (Y_{k+1} = y_{k+1} | Y_k = y_k, \ldots, Y_1 = y_1, Y_0 = y_0) = P(Y_{k+1} = y_{k+1} | Y_k = y_k).$$

Das Besondere an Markov-Ketten ist, dass sie gedächtnislos sind. In unserem Fall heißt es, dass nur die Reihe der Überträge eine Markov-Kette bildet und der Übertrag aus der vorherigen Spalte für die Bildung des neuen Übertrages zu betrachten ist.

Definition 4 (Zustandsraum). *Ein Zustandsraum ist die Menge an möglichen Ergebnissen, die eine Markov-Kette annehmen kann.*

Die möglichen Ergebnisse bei der schriftlichen Addition sind die einzelnen Ketten der Überträge, die entstehen können. Folgendes Lemma bestimmt daher den Zustandsraum:

Lemma 3.1. *Bei der Addition von m Zahlen der Länge n entsteht maximal der Übertrag von m-1. Dies ist unabhängig von der gewählten Darstellung der Zahlen durch eine beliebige Basis* $b \geq 2$.

Beweis. Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion über m durch.
Induktionsanfang: Wir starten mit einer schriftlichen Addition von 2 Zahlen zur Basis b. Also entspricht m der Zahl 2. Beginnen wir bei der ganz rechten Spalte: Hier ermitteln wir aus der Menge $\{0, 1, \ldots, b-1\}$ die höchste Kombination mit $X_{1,0} = b-1$ und $X_{2,0} = b-1$. Die Addition liefert uns die Zahl $2b-2$, und diese hat einen Übertrag von $C_1 = 1$ und liefert dementsprechend einen carry-out von 1 für die nächste Spalte. In der nächsten Spalte haben wir erneut als höchste Kombination: $X_{1,1} = b-1$ und $X_{2,1} = b-1$. Mit dem Wert für $C_1 = 1$ erhalten wir dann in der Summe die Zahl $2b-1$. Auch hier erhalten wir einen Übertrag, nämlich $C_2 = 1$. Für die restlichen Spalten der zu addierenden Zahl gehen wir analog vor. Wir stellen dabei fest, dass man mit der Zahl $2b-1$ die höchste Zahl erreicht. Die Zahl $2b$, die einen Übertrag von 2 liefern würde, wird nicht erreicht. Damit haben wir bei der Addition von 2 Zahlen maximal den Übertrag von 1 und erhalten eine wahre Aussage.
Induktionsschritt: Nun schließen wir von $m \geq 2$ Zahlen auf $m+1$ Zahlen. Aus der Induktionsvoraussetzung ist für $k = 0, \ldots, n$ bekannt, dass

$$X_{1,k} + \cdots + X_{m,k} + C_k < bm, \text{ wobei } C_k \leq m-1 \text{ ist}. \tag{1}$$

Um nun zu zeigen, dass für die Addition von $m+1$ ebenfalls das Lemma gilt, betrachten wir für $k = 0, \ldots, n$ die Ungleichung $X_{1,k} + \cdots + X_{m,k} + X_{m+1,k} + C'_k < b(m+1)$. Ziel ist es, explizit zu zeigen, dass $C'_k \leq m$ ist. Wir beginnen mit der ganz rechten Spalte mit $k = 0$:

$$\underbrace{X_{1,0} + \cdots + X_{m,0}}_{<\text{bm}} + \underbrace{X_{m+1,0}}_{\leq(b-1)} + 0 < bm + (b-1) < b(m+1).$$

So ergibt sich, dass auch C'_1 kleiner gleich m sein muss. Wir überprüfen den Fall mit $k = 1$:

$$\begin{aligned} &X_{1,1} + \cdots + X_{m,1} + X_{m+1,1} + C'_1 \\ &= \underbrace{X_{1,1} + \cdots + X_{m,1} + (C'_1 - 1)}_{<bm} + 1 + \underbrace{X_{m+1,1}}_{\leq(b-1)} \\ &< bm + 1 + (b-1) = b(m+1) \end{aligned}$$

Somit ist auch C'_2 kleiner gleich m. Für die restlichen Spalten der zu addierenden Zahl kann man analog vorgehen. Dabei wird allerdings nie ein Übertrag erreicht, der größer als m ist. Somit haben wir auch bei der Addition von $m+1$ Zahlen maximal den Übertrag von m und erhalten eine wahre Aussage. □

Der Zustandsraum $\{0, 1, 2, \ldots, m-1\}^{n+1}$ beschreibt die möglichen Überträge der schriftlichen Addition, wobei m für die Anzahl der zu addierenden Zahlen und n für die Länge steht.

Jetzt haben wir geklärt, was der maximale Übertrag ist. Als nächstes gehen wir der folgenden Frage nach: Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für einen bestimmten Übertrag in einer Spalte?
Um diese Frage zu beantworten, benötigen wir etwas Vorarbeit. Der Abstieg (engl.: descent) in einer Permutation σ sei

$$\mathrm{des}(\sigma) = |\{i : \sigma(i) > \sigma(i+1)\}|, \tag{2}$$

wobei i dabei eine Position innerhalb der Permutation σ ist. Darüber hinaus benötigen wir noch eine Definition für die Euler-Zahlen, siehe z.B. [Pet15].

Definition 5 (Euler-Zahlen)**.** *Die Euler-Zahlen $A_{m,k}$ bezeichnen die Anzahl der Permutationen σ in der symmetrischen Gruppe S_m, bei denen genau k Abstiege vorhanden sind. Das heißt also:*

$$A_{m,k} = |\{\sigma \in S_m : \mathrm{des}(\sigma) = k\}|.$$

Man kann die Euler-Zahlen noch durch die alternative Summenformel [Pet15, Section 1.5] schreiben:

$$A_{m,k} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i (k+1-i)^m \binom{m+1}{i} \qquad \text{mit } m \geq 1, k \geq 0. \tag{3}$$

In diesem Kapitel haben wir uns mit der schriftlichen Addition auseinandergesetzt. Dabei wurde aus ein paar Beispielen ein allgemeines Schema für die Addition (vgl. Tabelle 5) aufgestellt. Des Weiteren wurde definiert, dass die Reihe der Überträge sich wie eine Markov-Kette (vgl. Definition 3) verhält. Das heißt, dass immer nur der direkte Vorgänger für den nächsten Übertrag betrachtet wird. Außerdem wurde bewiesen, dass der höchste Übertrag bei einer Addition von m Zahlen maximal so groß ist wie $m-1$ (vgl. Lemma 3.1). Darüber hinaus wurden zwei weitere Begriffe ergänzt: carry-in (Übertrag, der in die Spalte mit eingeht) und carry-out (Übertrag, der mit in die nächste Spalte genommen wird). Wenn wir wissen möchten, wie bei der Addition von m Zahlen und einen bestimmten carry-in die Chance ist, einen bestimmten carry-out zu erhalten, liefert die Übergangsmatrix die Antwort. Denn genau in dieser Matrix befinden sich die einzelnen bedingten Wahrscheinlichkeiten für die jeweiligen Kombinationen der Überträge.

4 Die Übergangsmatrix

Dieses Kapitel beruht auf den Erkenntnissen von Holte [Hol97] aus dem Jahre 1997. John M. Holte beschäftigte sich intensiv mit dem Carries-Prozess. Im folgenden wird der Begriff Übergangsmatrix für Holtes "amazing matrix" verwendet. Wie eine Übergangsmatrix entsteht und von welchen Faktoren sie beeinflusst wird, betrachten wir nun genauer.

Definition 6 (Übergangsmatrix). *Die Übergangsmatrix veranschaulicht alle bedingten Wahrscheinlichkeiten, die bei den unterschiedlichen Kombinationen der carry-in i und carry-out j entstehen können. Als Übergangsmatrix $\Pi_m = (\pi_{i,j})$ wird daher eine Matrix der folgenden Form bezeichnet:*

$$\pi_{i,j} = P(C_{k+1} = j \,|\, C_k = i) \ \ mit \ \ 0 \leq i, j \leq m-1,$$

wobei m für die Anzahl der zu addierenden Zahlen steht.

Die Übergangsmatrix weist dabei die folgende Gestalt auf:

$$\begin{aligned}\Pi_m &= \begin{pmatrix} \pi_{0,0} & \cdots & \pi_{0,m-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{m-1,0} & \cdots & \pi_{m-1,m-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P(C_{k+1} = 0 | C_k = 0) & \cdots & P(C_{k+1} = m-1 | C_k = 0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P(C_{k+1} = 0 | C_k = m-1) & \cdots & P(C_{k+1} = m-1 | C_k = m-1) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Die Übergangsmatrizen erfüllen die folgenden Eigenschaften:

- Die Matrix hat die gleiche Anzahl an Spalten und Zeilen und ist daher quadratisch.
- Für alle Matrixeinträge gilt $\pi_{i,j} \geq 0$, da es keine negativen Wahrscheinlichkeiten gibt.
- Für jede Zeilensumme gilt: $\sum_{j=0}^{m-1} \pi_{i,j} = 1$ für alle $i \in \{0, \ldots, m-1\}$. Grund dafür ist, dass die $C_{k+1} = 0, \ldots, C_{k+1} = m-1$ eine disjunkte Zerlegung des Zustandsraums sind und damit die Summe aller dieser Einträge einer Zeile damit gleich 1 ist.

Da die Übergangsmatrix alle bedingten Wahrscheinlichkeiten in einer Matrix übersichtlich darstellt, benötigen wir noch eine Herleitung dieser Übergangsmatrix Π_m. Orientiert an den Aussagen von [Hol97] folgt nun ein wichtiges Theorem.

Theorem 4.1. *Angenommen man addiert m Zahlen in der Basis b. Die Wahrscheinlichkeit, einen carry-out j in die nächste Spalte mitzunehmen, unter der Voraussetzung, dass wir einen carry-in von i haben, ist*

$$\pi_{i,j} = \frac{1}{b^m} \sum_{0 \leq l \leq j+1-(i+1)/b} (-1)^l \binom{m+1}{l} \binom{m + b(j+1-l) - 1 - i}{m}. \tag{4}$$

Nun folgt ein erstes Beispiel für eine solche Übergangsmatrix. Aus (4) lässt sich die Übergangsmatrix für eine beliebige Basis b ableiten. Die Übergangsmatrizen für die Addition von 2 bzw. 3 Ketten sehen dann wie folgt aus:

$$\Pi_2 = \frac{1}{2b} \begin{pmatrix} b+1 & b-1 \\ b-1 & b+1 \end{pmatrix} \qquad \Pi_3 = \frac{1}{6b^2} \begin{pmatrix} b^2+3b+2 & 4b^2-4 & b^2-3b+2 \\ b^2-1 & 4b^2 & b^2-1 \\ b^2-3b+2 & 4b^2-4 & b^2+3b+2 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Wir legen nun fest, dass wir zur Basis 10 die Übergangsmatrizen berechnen und erhalten dann die beiden Übergangsmatrizen

$$\Pi_2 = \begin{bmatrix} 0.55 & 0.45 \\ 0.45 & 0.55 \end{bmatrix} \qquad \Pi_3 = \begin{bmatrix} 0.220 & 0.660 & 0.120 \\ 0.165 & 0.670 & 0.165 \\ 0.120 & 0.660 & 0.220 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Beispielsweise kann man für den Eintrag $b_{2,3} = 0.165$ der Matrix Π_3 sagen, dass man bei der Addition von 3 Zahlen und einem carry-in von 1 einen carry-out von 2 zu 16.5% erwarten kann.

Beweis. Ausgangspunkt ist hierbei die Entwicklung des Übertrags C_{k+1}. Wir definieren dabei zuerst $j = C_{k+1}$. Die Variable i steht dabei für den Übertrag C_k. Um den Übertrag C_{k+1} zu erhalten, benötigen wir den Übertrag der vorherigen Spalte, also C_k und alle Ziffern der k-ten-Spalte. Es ergibt sich dann folgende Berechnung (vgl. Tabelle 5)

$$S_k = i + X_{1,k} + X_{2,k} + X_{3,k} + \cdots + X_{m,k}. \tag{7}$$

Die Summe aller Elemente einer Spalte und der Variablen i kann eingeschränkt werden durch Verbindungen von j und der Basis b. Dies haben wir bereits in dem Lemma 3.1 gesehen, als es um den höchsten Übertrag ging. So folgt für den Übertrag $C_{k+1} = j$

$$jb \leq i + X_{1,k} + X_{2,k} + X_{3,k} + \cdots + X_{m,k} \leq (j+1)b - 1. \tag{8}$$

Holte führt an dieser Stelle eine zusätzliche Variable Y ein, für die ebenfalls gilt $0 \leq Y, X_{1,k}, X_{2,k}, \ldots, X_{m,k} \leq b-1$. Y ist dabei die Differenz von $i + X_{1,k} + X_{2,k} + \cdots + X_{m,k}$ zu $(j+1)b-1$. Zudem wird eine neue Variable r eingeführt. Diese dient erneut der besseren Lesbarkeit.

$$r := Y + X_{1,k} + X_{2,k} + X_{3,k} + \cdots + X_{m,k} \underbrace{\leq}_{vgl.(8)} (j+1)b - 1 - i. \tag{9}$$

Wenn wir nun die Anzahl der ganzzahligen Lösungen von r berechnen möchten, können wir auch den Koeffizenten von z^r in $(1 + z + z^1 + z^2 + z^3 + \cdots + z^{b-1})^{m+1}$ dafür ermitteln. Der erwähnte Ausdruck kann zunächst in einen Bruch umgeschrieben werden. Das sieht dann wie folgt aus

$$(1 + z + z^1 + z^2 + z^3 + \cdots + z^{b-1})^{m+1} = \frac{(1-z^b)^{m+1}}{(1-z)^{m+1}}.$$

Unter Verwendung des allgemeinen binomischen Satzes (vgl. z.B. [HW06, Kapitel 1.3]) erhalten wir für den Zähler und für den Nenner aufgrund der binomischen Reihe (siehe z.B. [For15, Kapitel 22]) die Ausdrücke

$$\begin{aligned} (1-z^b)^{m+1} &= \sum_{l=0}^{m+1} (-1)^l \binom{m+1}{l} z^{bl} \\ (1-z)^{-(m+1)} &= \sum_{s \geq 0} \binom{s+m}{m} z^s. \end{aligned}$$

Für das obige Polynom erhält man den Ausdruck:

$$
\begin{aligned}
(1-z^b)^{m+1}(1-z)^{-(m+1)} &= \sum_{l=0}^{m+1}(-1)^l\binom{m+1}{l}z^{bl}\sum_{s\geq 0}\binom{s+m}{m}z^s \\
&= \sum_{bl+s}(-1)^l\binom{m+1}{l}\binom{s+m}{m}z^{bl+s}
\end{aligned}
$$

Daher folgt die Betrachtung des Koeffzienten von z^r. Hierbei ist die Variable r definiert durch $r = bl+s$, und diesen Ausdruck kann man umformen, sodass dann gilt $s = r-bl$. Allerdings nur für $l = r/b$ ist die Varibable $s = 0$.

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{r=bl+s}(-1)^l\binom{m+1}{l}\binom{s+m}{m} \\
&= \sum_{l\leq r/b}(-1)^l\binom{m+1}{l}\binom{r-bl+m}{m} \\
&\underset{[1]}{=} \sum_{0\leq j+1-(i+1)/b}(-1)^l\binom{m+1}{l}\binom{m+b(j+1-l)-1-i}{m}
\end{aligned}
$$

Für [1] gilt laut (9) für die Variable $r = (j+1)b-1-i$, sodass man mithilfe einer Umformung den Ausdruck $r/b = (j+1)-(i+1)/b$ erhält.
Um nun die Gleichung des Theorems zu erhalten, ist zu beachten, dass $\pi_{i,j}$ ein Laplace Experiment ist. Das heißt, wir teilen die Anzahl der Lösungen mit der Potenz z^r durch die Anzahl aller möglichen Lösungen. Die Anzahl der Lösungen mit Potenz z^r entspricht dem Koeffizienten von z^r, und die Anzahl aller möglichen Lösungen entspricht b^m. Wir erhalten so die Gleichung für die Übergangsmatrix Π_m

$$
\pi_{i,j} = \frac{1}{b^m}\sum_{0\leq l\leq j+1-(i+1)/b}(-1)^l\binom{m+1}{l}\binom{m+b(j+1-l)-1-i}{m}.
$$

□

Bei genauerer Betrachtung erkennt man schon in Gleichung (5) die Punktsymmetrie. Die Einträge der Übergangsmatrix sind punktsymmetrisch angeordnet. Diese Eigenschaft lässt sich mithilfe von [Hol97] und [Wea85] beweisen.

Satz 2. *Die Einträge der Übergangsmatrix sind punktsymmetrisch angeordnet, d.h.:* $\pi_{i,j} = \pi_{m-1-i,m-1-j}$ *mit i, j = 0, 1, . . . , m - 1.*

Beweis. Es wird dabei zuerst die Übergangsmatrix $\pi_{i,j}$ formuliert:

$$
\pi_{i,j} = P(C_{k+1} = j|C_k = i) \text{ mit } 0 \leq i,j \leq m-1.
$$

Für den Übertrag an der k-ten Stelle gilt erneut

$$
S_{k+1} = X_{1,k} + X_{2,k} + \cdots + X_{m,k} + C_k.
$$

Dabei steht $X_{x,k}$ für einen Vertreter aus der Menge {0, 1, 2, . . . , b-1} mit x = 1,. . . , m. Unter der Bedingung, dass wir $C_k = i$ wählen, werden für $C_{k+1} = j$ alle möglichen "Tupel" gesucht, sodass die Summe mit i einem Übertrag j entspricht. Ein Tupel ist hierbei $(x_{1,k}, x_{2,k}, \dots, x_{m,k}) \in \{0, 1, \dots, b-1\}^m$. Genauer gesagt heißt das dann

$$jb \leq x_{1,k} + x_{2,k} + \cdots + x_{m,k} + i \leq (j+1)b - 1.$$

Wichtig ist hier, dass die Tupel alle gleichverteilt vorliegen und es sich so um ein Laplace Experiment handelt. Daraus resultiert dann für $\pi_{i,j}$

$$\pi_{i,j} = \frac{|(x_{1,k}, \dots, x_{m,k}) \in \{0, 1, \dots, b-1\}^m | jb \leq x_{1,k} + \cdots + x_{m,k} + i \leq (j+1)b - 1|}{b^m}.$$

Analog formuliert wird es für $\pi_{m-1-i,m-1-j}$. Für die bessere Übersicht wird zunächst noch definiert

$$\begin{aligned}
E_{i,j} &= \{|(x_{1,k} + \cdots + x_{m,k}) \in \{0, 1, \dots, b - 1^m\}| jb \\
&\quad \leq x_{1,k} + \cdots + x_{m,k} + i \leq (j+1)b - 1|\} \\
E_{m-1-i,m-1-j} &= \{|(x_{1,k} + \cdots + x_{m,k}) \in \{0, 1, \dots, b - 1^m\}| (m-1-j)b \\
&\quad \leq x_{1,k} + \cdots + x_{m,k} + (m-1-i) \leq (m-1-j+1)b - 1|\}.
\end{aligned}$$

Also ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\pi_{i,j} &= \frac{|E_{i,j}|}{b^m} \\
\pi_{m-1-i,m-1-j} &= \frac{|E_{m-1-i,m-1-j}|}{b^m}.
\end{aligned}$$

Um zu zeigen, dass $\pi_{i,j}$ und $\pi_{m-1-i,m-1-j}$ gleich sind, ist zunächst zu zeigen, dass die beiden Mengen $E_{i,j}$ und $E_{m-1-i,m-1-j}$ gleichmächtig sind. Dafür wird eine Fallunterscheidung durchgeführt.

Fall 1:
Es ist zu zeigen, dass $|E_{i,j}| \leq |E_{m-1-i,m-1-j}|$. Sei $(x_{1,k}, \dots, x_{m,k}) \in E_{i,j}$. Dann:

$$\begin{aligned}
& jb \leq x_{1,k} + \cdots + x_{m,k} + i \leq (j+1)b - 1 \\
& \Leftrightarrow -jb \geq -x_{1,k} - \cdots - x_{m,k} - i \geq -(j+1)b + 1 \\
& \Leftrightarrow -jb + mb - 1 \geq (mb-1) - x_{1,k} - \cdots - x_{m,k} - i \geq -(j+1)b + 1 + mb - 1 \\
& \Leftrightarrow ((m-1-j)+1)b - 1 \geq (b-1-x_{1,k}) + \cdots + (b-1-x_{m,k}) + (m-1-i) \geq b(m-1-j) \\
& \Leftrightarrow ((b-1-x_{1,k}), \dots, (b-1-x_{m,k})) \in E_{m-1-i,m-1-j}
\end{aligned}$$

Daraus kann gefolgert werden, dass $|E_{i,j}| \leq |E_{m-1-i,m-1-j}|$ gilt.

Fall 2:
Es ist zu zeigen, dass $|E_{i,j}| \geq |E_{m-1-i,m-1-j}|$. Sei $(x_{1,k}, \dots, x_{m,k}) \in E_{m-1-i,m-1-j}$. Dann:

$$\begin{aligned}
& (m-1-j)b \leq x_{1,k} + \cdots + x_{m,k} + (m-1-i) \leq (m-1-j+1)b - 1 \\
& \Leftrightarrow (m-1-j)b - mb + 1 \leq -mb + 1 + x_{1,k} + \cdots + x_{m,k} + (m-1-i) \\
& \qquad \leq (m-1-j+1)b - 1 - mb + 1 \\
& \Leftrightarrow -(j+1)b + 1 \leq (x_{1,k} - b + 1) + \cdots + (x_{m,k} - b + 1) - i \leq -jb \\
& \Leftrightarrow (j+1)b - 1 \leq (b - x_{1,k} - 1) + \cdots + (b - x_{m,k} - 1) + i \leq jb \\
& \Leftrightarrow ((b - x_{1,k} - 1), \dots (b - x_{m,k} - 1)) \in E_{i,j}
\end{aligned}$$

Daraus kann geschlussfolgert werden, dass $|E_{i,j}| \geq |E_{m-1-i,m-1-j}|$ gilt.

Aufgrund der Fallunterscheidung können wir sagen, dass $\pi_{i,j}$ und $\pi_{m-1-i,m-1-j}$ gleich sind und somit die Übergangsmatrix punktsymmetrisch ist. $\square$

Nochmal kurz und knapp zusammengefasst wurde in diesem Kapitel die Übergangsmatrix definiert. Diese Matrix ist eine quadratische nichtnegative Matrix und beinhaltet die bedingten Wahrscheinlichkeiten für die jeweiligen Kombinationen der Überträge (vgl. Definition 6). Das Besondere an dieser Matrix ist, dass die Einträge der Übergangsmatrix punktsymmetrisch angeordnet sind (vgl. Satz 2). Diese Matrix besitzt ebenso wie andere Matrizen bestimmte Eigenwerte sowie Eigenvektoren. Wie diese Eigenwerte und Eigenvektoren der Übergangsmatrix aussehen, soll in dem nächsten Kapitel erläutert werden.

5 Eigenwerte und Eigenvektoren der Übergangsmatrix

In diesem Kapitel schauen wir uns die Eigenwerte und Eigenvektoren der Übergangsmatrix aus Kapitel 4 an. Dabei gehen die Sätze und Korollare auf J. Holte [Hol97] zurück. Bei der Bestimmung der Eigenwerte lässt sich ein Muster erkennen. Für die schriftliche Addition von 2 Zahlen erhalten wir die Eigenwerte $\{1, 0.1\}$, und bei der Addition von drei Zahlen erhalten wir die Eigenwerte $\{1, 0.1, 0.01\}$. Daraus ergibt sich der folgende Satz:

Satz 3. *Die Eigenwerte der Übergangsmatrix Π_m weisen eine geometrische Folge auf:*

$$1, b^{-1}, b^{-2}, \ldots, b^{-(m-1)}, \tag{10}$$

wobei b für die Basis steht und m für die Anzahl der zu addierenden Zahlen bei der schriftlichen Addition.

Um den Satz 3 später beweisen zu können, ist etwas Vorarbeit nötig. Daher folgen zunächst noch ein paar Definitionen, die im späteren Beweis des Satzes 3 ihre Anwendung finden. Der Reihe nach werden nun die Euler-Polynome, die Carlitz-Identität und die Matrix V_m definiert.

Definition 7 (Euler-Polynome). *Für ein festes $m \geq 0$ sei*

$$S_m(t) := \sum_{\sigma \in S_m} t^{\mathrm{des}(\sigma)} = \sum_{k=0}^{m-1} A_{m,k} t^k, \tag{11}$$

wobei $\mathrm{des}(\sigma)$ für die Abstiege in einer Permutation steht (vgl. Gleichung (2)).

Satz 4 (Carlitz Identität; siehe z.B. [Pet15, Section 1.5]). *Für alle $m \geq 0$*

$$\frac{S_m(t)}{(1-t)^{m+1}} = \sum_{k \geq 0} (k+1)^m t^k. \tag{12}$$

Definition 8. *Sei $V_m = v_{j,k}$ für $0 \leq j, k \leq m-1$ mit*

$$v_{j,k} = \sum_{l=0}^{k} (-1)^l \binom{m+1}{l} (k+1-l)^{m-j}. \tag{13}$$

Bemerkung 3. *Für die Einträge der Matrix V_m gilt nach [Pet15]*

$$\sum_{k\geq 0} v_{j,k}t^k = (1-t)^j S_{m-j}(t) \qquad \textit{mit } 0 \leq j,k \leq m-1, \tag{14}$$

wobei $S_{m-j}(t)$ ein Euler-Polynom (vgl. Definition 7) ist.

Wir betrachten nun anhand der schriftlichen Addition von 2 bzw. 3 Zahlen die entstehenden Matrizen V_m.

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad V_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 3. *Wir überprüfen die Aussage bzgl. der geometrischen Folge der Eigenwerte (vgl. 10) anhand der schriftlichen Addition von 3 Zahlen. An dieser Stelle nutzen wir die Eigenschaft der Diagonalisierbarkeit der Matrix Π_m aus. Mithilfe der Gleichung $V_3\Pi_3V_3^{-1} = D_3$ (vgl. [Pet15, Section 7.2]) überprüfen wir an einem Beispiel die Diagonaliserbarkeit der Matrix Π_3. D_3 steht für die Diagonalmatrix mit den Eigenwerten auf der Diagonalen, Π_m steht für die Übergangsmatrix, und V_3^{-1} steht für die inverse Matrix zu V_3.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.220 & 0.660 & 0.120 \\ 0.165 & 0.670 & 0.165 \\ 0.120 & 0.660 & 0.220 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/6 & 1/2 & 1/3 \\ 1/6 & 0 & -1/6 \\ 1/6 & -1/2 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 \end{pmatrix}$$

Wie im Beispiel bereits gezeigt, funktioniert die Gleichung $V_m\Pi_m{V_m}^{-1} = D_m$ für $m = 3$. Durch eine Umstellung der Gleichung ergibt sich die folgende Gleichung in Lemma 5.1 [Pet15].

Lemma 5.1. *Es gilt $V_m\Pi_m = D_mV_m$ für alle $m \geq 2$.*

Beweis. Es ist zu zeigen, dass $V_m\Pi_m = D_mV_m$. Diese Gleichung ist äquivalent zu

$$\sum_{k=0}^{m-1} v_{j,k}\pi_{k,l} = \frac{v_{j,l}}{b^j} \qquad \text{mit } 0 \leq j,l \leq m-1. \tag{15}$$

Hierbei wurde zunächst der formelle Matrixausdruck durch die Einträge der Matrizen ersetzt. Grundbedingungen sind dabei die Definition 8, Theorem 4.1 und der Satz 3. Wenn wir nun die Einträge $\pi_{k,l}$ durch den Ausdruck in Theorem 4.1 ersetzen, folgt

$$\sum_{k=0}^{m-1} v_{j,k}\pi_{k,l} = \frac{1}{b^m}\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{n=0}^{l+1-(k+1)/b}(-1)^n\binom{m+1}{n}\binom{m+b(l+1-n)-1-k}{m}v_{j,k} \tag{16}$$

$$= \frac{1}{b^m}\sum_{n=0}^{l}(-1)^n\binom{m+1}{n}\sum_{k=0}^{(l+1-n)b-1}\binom{m+b(l+1-n)-1-k}{m}v_{j,k}. \tag{17}$$

Für die bessere Übersicht wird ein Zwischenelement $M = (l+1-n)b-1$ eingefügt, sodass die innere Summe aus (17) umgeschrieben werden kann:

$$\sum_{k=0}^{m-1} v_{j,k}\pi_{k,l} = \frac{1}{b^m}\sum_{n=0}^{l}(-1)^n\binom{m+1}{n}\sum_{k=0}^{M}\binom{m+M-k}{m}v_{j,k}. \tag{18}$$

Anschließend kann die innere Summe aus (18) durch den Koeffizienten von t^M in dem folgenden Polynom ermittelt werden. Dabei ist zu beachten, dass $r := M - k$ und dementsprechend ist $t^M = t^r t^k = t^{r+k} = t^M$.

$$\left(\sum_{r\geq 0}\binom{m+r}{m}t^r\right)\left(\sum_{k\geq 0}v_{j,k}t^k\right) \underset{(14)}{=} \frac{1}{(1-t)^{m+1}}(1-t)^j S_{m-j}(t)$$
$$= \frac{S_{m-j}(t)}{(1-t)^{m+1-j}}$$
$$\underset{\text{Carlitz}}{=} \sum_{M\geq 0}(M+1)^{m-j}t^M$$

Für den Koeffizienten von t^M wird dann der folgende Ausdruck erhalten:

$$\sum_{k=0}^{M}\binom{m+M-k}{m}v_{j,k} = (M+1)^{m-j}. \tag{19}$$

Wenn wir nun zu unserer Gleichung (18) zurückkehren, erhalten wir mithilfe des Koeffizienten von t^M (vgl. (19)):

$$\sum_{k=0}^{m-1}v_{j,k}\pi_{k,l} = \frac{1}{b^m}\sum_{n=0}^{l}(-1)^n\binom{m+1}{n}(M+1)^{m-j}$$
$$= \frac{1}{b^m}\sum_{n=0}^{l}(-1)^n\binom{m+1}{n}((l+1-n)b)^{m-j}$$
$$= \frac{1}{b^j}\sum_{n=0}^{l}(-1)^n\binom{m+1}{n}(l+1-n)^{m-j}$$

Aus der letzten Gleichung folgt dann

$$\sum_{k=0}^{m-1}v_{j,k}\pi_{k,l} = \frac{1}{b^j}\sum_{n=0}^{l}(-1)^n\binom{m+1}{n}(l+1-n)^{m-j} = \frac{v_{j,l}}{b^j}.$$

Wir erhalten für $v_{j,l}$ den identischen Ausdruck wie in der Defintion 8. Es wurde bewiesen, dass die obige Gleichung $V_m\Pi_m = D_mV_m$ korrekt ist. □

Mithilfe von Lemma 5.1 konnte die Aussage bzgl. der geometrischen Folge der Eigenwerte aus Satz 3 bewiesen werden. Ausgangspunkt war dabei das Beispiel 3. Das Beispiel lieferte die erste Gleichung der Form $V_m\Pi_mV_m^{-1} = D_m$. Dabei waren uns schon die Matrizen V_m und Π_m bekannt aus vorherigen Anschnitten. Die Rechnung liefert das Ergebnis einer Diagonalmatrix, mit den Eigenwerten auf der Diagonalen. Durch eine Umstellung der Gleichung in Lemma 5.1 konnte die Aussage dann formell bewiesen werden. Wir erhielten für die Eigenwerte das Ergebnis $1/b^j$, und das stimmt überein mit der Aussage in Satz 3. Somit folgen die Eigenwerte der geometrischen Folge $1, b^{-1}, b^{-2}, \ldots, b^{-(m-1)}$.

Korollar 1. *Die Eigenvektoren der Übergangsmatrix sind nicht von der Basis b abhängig.*

Beweis. Die Eigenvektoren lassen sich durch die Matrix V_m darstellen, die ohne die Verwendung von der Basis b fungiert. □

Korollar 2. *Die erste Reihe der Matrix V_m entspricht einer Reihe der Euler-Zahlen $A_{m,k}$.*

Beweis. In der ersten Reihe von V_m ist $j = 0$. Durch das Einsetzen der Bedingung in Gleichung (13) erhalten wir den Ausdruck $v_{0,k} = \sum_{l=0}^{k}(-1)^l\binom{m+1}{l}(k+1-l)^m$. Dieser Ausdruck stimmt überein mit der alternativen Definition (3) für die Euler-Zahlen $A_{m,k}$. □

Satz 5. *Die letzte Reihe der Matrix V_m entspricht einer Reihe des Pascal'schen Dreiecks, allerdings mit alternierenden Vorzeichen*

$$v_{m-1,k} = (-1)^k\binom{m-1}{k} \text{ mit } m \geq 1, 0 \leq k \leq m-1.$$

Bevor dieser Satz bewiesen wird, ist noch etwas Vorarbeit bzgl. des Pascal'schen Dreiecks notwendig. Das Pascal'sche Dreieck ist eine Anordung von Binomialkoeffizienten. Jeder Eintrag im Pascal'schen Dreieck lässt sich durch die Addition zweier Elemente in der darüberliegenden Reihe ermitteln. Dabei gilt der folgende Grundatz

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}. \tag{20}$$

Als Nächstes ergänzen wir zwei weitere Hilfslemmata, um anschließend den Satz 5 zu beweisen.

Lemma 5.2. *Es gilt*

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{m+1}{i} = (-1)^k\binom{m}{k} \text{ mit } 0 \leq k \leq m-1 \text{ und } m \geq 1.$$

Beweis. Das Hilfslemma wird mittels Induktion über k bewiesen.
Induktionsanfang: Wir wählen $k = 0$. Dann folgt eingesetzt

$$\sum_{i=0}^{0}(-1)^i\binom{m+1}{i} = (-1)^0\binom{m+1}{0} = 1 = (-1)^0\binom{m}{0}.$$

Wir erhalten für den Induktionsanfang eine wahre Aussage.
Induktionsschritt: Wir wählen $k \geq 0$ unter der Bedingung, dass die Induktionsvoraussetzung für k erfüllt ist.

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i\binom{m+1}{i} &= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{m+1}{i} + (-1)^{k+1}\binom{m+1}{k+1}\\ &\underset{\text{I.V.}}{=} (-1)^k\binom{m}{k} + (-1)^{k+1}\binom{m+1}{k+1}\\ &= (-1)^{k+1}\left(\binom{m+1}{k+1} - \binom{m}{k}\right)\\ &\underset{(20)}{=} (-1)^{k+1}\binom{m}{k+1}\end{aligned}$$

□

Lemma 5.3. *Es gilt*

$$v_{m-1,k} = v_{m-1,k-1} + \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{m+1}{i}.$$

Beweis. Da wir diesmal uns die letzte Reihe der Matrix V_m anschauen, nehmen wir an, dass für unseren carry-out die folgende Bedingung gilt: $j = m-1$.

$$\begin{aligned} v_{m-1,k} &= \sum_{l=0}^{k} (-1)^l \binom{m+1}{l} (k+1-l)^{m-(m-1)} \\ &= \sum_{l=0}^{k} (-1)^l \binom{m+1}{l} (k+1-l)^1 \end{aligned}$$

Nun zum eigentlichen Beweis des Lemmas.

$$\begin{aligned} v_{m-1,k} &= (-1)^0 \binom{m+1}{0} (k+1) + \cdots + (-1)^{k-1} \binom{m+1}{k-1} 2 + (-1)^k \binom{m+1}{k} 1 \\ &= (-1)^0 \binom{m+1}{0} k + \cdots + (-1)^{k-1} \binom{m+1}{k-1} 1 \\ &+ (-1)^0 \binom{m+1}{0} + \cdots + (-1)^{k-1} \binom{m+1}{k-1} + (-1)^k \binom{m+1}{k} \\ &= v_{m-1,k-1} + \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{m+1}{i} \end{aligned}$$

$\square$

Beweis von Satz 5. Für die Schlussfolgerung ist zu beweisen, dass die folgende Aussage korrekt ist.

$$v_{m-1,k} = (-1)^k \binom{m-1}{k} \text{ mit } m \geq 1, 0 \leq k \leq m-1. \tag{21}$$

Die Gleichung wird mittels Induktion über k bewiesen.
Induktionsanfang: Sei $m \geq 1$ beliebig und wähle $k = 0$. Dann gilt eingesetzt

$$v_{m-1,0} := (-1)^0 \binom{m+1}{0} 1 = 1 = (-1)^0 \binom{m-1}{0}.$$

Wir erhalten für den Induktionsanfang eine wahre Aussage.
Induktionsschritt: Sei $k \geq 1$ und die obige Induktionsvoraussetzung ist erfüllt für $k-1$. So ist:

$$v_{m-1,k-1} = (-1)^{k-1} \binom{m-1}{k-1}.$$

Abschließend folgt nun für die letzte Reihe:

$$\begin{aligned}
v_{m-1,k} &\underset{\text{Lemma 5.3}}{=} v_{m-1,k-1} + \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{m+1}{i} \\
&\underset{\text{I.V.}}{=} (-1)^k\binom{m-1}{k-1} + \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{m+1}{i} \\
&\underset{\text{Lemma 5.2}}{=} (-1)^{k-1}\binom{m-1}{k-1} + (-1)^k\binom{m}{k} \\
&= (-1)^k\left(\binom{m}{k} - \binom{m-1}{k-1}\right) \\
&\underset{(20)}{=} (-1)^k\binom{m-1}{k}.
\end{aligned}$$

□

Nachdem wir uns schon die Reihen der Matrix V_m angeschaut haben, schauen wir uns nun die Spalten der Matrix V_m etwas genauer an.

Korollar 3. *Die Einträge der ersten Spalte der Matrix V_m bestehen nur aus der Zahl 1.*

Beweis. Unter Verwendung von (13) können wir für $k = 0$ sagen, dass

$$v_{j,0} = \sum_{l=0}^{0}(-1)^l\binom{m+1}{l}(0+1-l)^{m-j} = 1$$

□

Korollar 4. *Die Einträge der letzten Spalte der Matrix V_m sind nur die Zahlen 1 oder -1.*

Beweis. Aus Definition 8 ist bekannt, dass k maximal so groß ist wie $m-1$. Daher folgt eingesetzt:

$$\begin{aligned}
v_{j,m-1} &= \sum_{l=0}^{m-1}(-1)^l\binom{m+1}{l}((m-1)+1-l)^{m-j} \\
v_{m-1,m-1} &\underset{(21)}{=} (-1)^{m-1}\binom{m-1}{m-1} = (-1)^{m-1}
\end{aligned}$$

Wir können also sagen, dass es nur von dem ersten Faktor abhängig ist, ob der letzte Eintrag der letzten Spalte die Zahl 1 oder -1 ist. Grund dafür ist dann unser m, also unsere Anzahl an zu addierenden Zahlen. Wenn wir ein ungerades m haben, erhalten wir die Zahl 1, und wenn wir ein gerades m haben, erhalten wir die Zahl -1. □

Kommen wir zurück zu der Frage aus dem Kapitel 3. Die Lösung auf die Frage nach der Wahrscheinlichkeit für einen bestimmten Übertrag bei der Addition von m Zahlen liefert der folgende Satz, siehe z.B. [Hol97].

Satz 6 (Holte)**.** *Bei der Addition von m Zahlen zur Basis b ist die Wahrscheinlichkeit, einen Übertrag der Größe k zu erhalten,*

$$p_{m,k} = \frac{A_{m,k}}{m!} \qquad \textit{mit k = 0, 1, \ldots, m-1.} \tag{22}$$

Mithilfe des Satzes von Perron-Frobenius (vgl. Satz 1) können wir diesen Satz beweisen. Doch zunächst noch eine kurze Zusammenfassung der Übergangsmatrix Π_m. Die Übergangsmatrix Π_m ist eine quadratische Matrix, deren Einträge positv sind (siehe Definition 6). Der betragsmäßig größte Eigenwert der Übergangsmatrix ist 1 (siehe Satz 3).

Beispiel 4. *Der Satz von Perron und Frobenius beruht auf der folgenden Formel: $v\Pi_m = \rho(\Pi_m)v$. Für $\rho(\Pi_m)$ gilt laut Satz 3 $\rho(\Pi_m) = 1$. Laut Holte [Hol97] ergibt sich für den stationary probability vector v die Gleichung $v\Pi_m = v$. Diese ist sehr ähnlich zu der Gleichung aus dem Satz 1. Der stationary probability vector v ist charakterisiert durch $v = (p_0, \ldots, p_{m-1})$, wobei m für die Anzahl der zu addierenden Zahlen steht. Nun wird zunächst am Beispiel der schriftlichen Addition von 3 Zahlen die Gleichung überprüft.*

$$(p_0, p_1, p_2) \begin{pmatrix} 0.220 & 0.660 & 0.120 \\ 0.165 & 0.670 & 0.165 \\ 0.120 & 0.660 & 0.220 \end{pmatrix} = (p_0, p_1, p_2)$$

Aus der obigen Gleichung ergibt sich das folgende Gleichungssytem mit drei Unbekannten.

$$\begin{aligned} 0.220p_0 + 0.165p_1 + 0.120p_2 &= p_0 \\ 0.660p_0 + 0.670p_1 + 0.660p_2 &= p_1 \\ 0.102p_0 + 0.165p_1 + 0.220p_2 &= p_2 \end{aligned}$$

Durch einige Umformungen lässt sich erkennen, dass folgende Bedingung gilt: $p_0 = p_2 = 2p_1$. Zudem ist bekannt, dass die Summe des Vektors mit den Einträgen p_0, p_1, p_2 die Zahl 1 ergibt. Daraus ergibt sich dann für den stationary probabiltiy vector $v = (\frac{1}{6}, \frac{4}{6}, \frac{1}{6})$.

Beweis. Wir konnten erkennen, dass die Einträge des Vektors v dieselben sind, wie sie durch $p_{m,k}$ ermittelt werden können. Diese Einträge $p_{m,k}$ haben wir bereits in der Matrix V_m erkannt, nämlich in der ersten Reihe der Matrix. Dort wurde festgestellt, dass die erste Reihe die Euler-Zahlen enthält (vgl. Korollar 2). Beim Vergleich konnten wir erkennen, dass der Vektor v dieselben Einträge enthält wie sie in $p_{m,k}$ enthalten sind. Man kann daraus nun schlussfolgern, dass v und $p_{m,k}$ dieselben Einträge liefern. Also kann man sagen, dass v auch dargestellt werden kann durch

$$v = (p_0, \ldots, p_{m-1}) = (\frac{A_{m,0}}{m!}, \ldots, \frac{A_{m,m-1}}{m!}).$$

Zusammengefasst können wir feststellen: Weil der Spektralradius von Π_m laut dem Satz 3 eins ist, können wir mithilfe des Satzes von Perron-Frobenius sagen, dass die erste Reihe der Matrix V_m proportional zu der stabilen Verteilung des Übertragsprozesses ist. Daher folgt, dass der Satz von Holte (22) korrekt ist [Pet15]. □

Dieses Kapitel beschäftigte sich mit den Eigenwerten und Eigenvektoren der Übergangsmatrix aus dem Kapitel 4. Dabei wurde festgestellt, dass die Eigenwerte einer bestimmten geometrischen Sequenz folgen (vgl. Satz 3). Aber auch die Eigenvektoren zu den Eigenwerten befinden sich in einer Matrix V_m. Bei der Betrachtung dieser Matrix V_m wurde festgestellt, dass in der ersten und letzten Spalte sowie Zeile Besonderheiten vorhanden sind. Um ein paar zu nennen: In der ersten Reihe der Matrix findet man eine Reihe der Euler-Zahlen (vgl. Korollar 2) wieder oder die letzte Reihe weist Parallelen zu einer Reihe des Pascal'schen Dreiecks (vgl. Satz 5) auf. Mithilfe des Wissens über die letzte Reihe konnte auch der letzte Eintrag der letzten Spalte bestimmt und definiert werden (vgl. Korollar 4). Dieser Eintrag ist entweder 1 oder -1, abhängig von der Anzahl der zu addierenden Zahlen.

6 Ausblick

Wenn wir jetzt nochmal die bisherigen Kapitel Revue passieren lassen, können wir feststellen, dass wir uns mit einigen Themen auseinandergesetzt haben. Unter anderem mit dem Satz von Perron-Frobenius (siehe Kapitel 2) inklusive einer Anwendung in Form des Rankings von Sportmannschaften (siehe Kapitel 2.1), den Übergangsmatrizen (siehe Kapitel 3) sowie deren Eigenwerten und Eigenvektoren (siehe Kapitel 5), aber auch der schriftlichen Addition (siehe Kapitel 3).
Ganz explizit konnten wir erkennen, dass die schriftliche Addition der Ursprung ist. Die schriftliche Addition bietet mehr als nur das stumpfe Addieren von Zahlen.
Wenn man bei der Addition von m Zahlen mit einem carry-in i startet und einen carry-out von j erhalten möchte, kann man die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Kombination mithilfe der Übergangsmatrix berechnen. Die Übergangsmatrix veranschaulicht alle entsprechenden Übertragskombinationen und ist dementsprechend eine $m \times m$ Matrix, wobei m die Anzahl der zu addierenden Zahlen ist. Ebenfalls wurde bewiesen, dass bei der Addition von m Zahlen höchstens ein Übertrag von $m-1$ auftreten kann (vgl. Lemma 3.1). Bei der Betrachtung der Übergangmatrix wurde festgestellt, dass die Einträge punktsymmetrisch angeordnet sind. Im weiteren Verlauf der Arbeit wurden die Eigenwerte sowie Eigenvektoren der Übergangsmatrix berechnet. Dabei wurde festgestellt, dass diese Eigenwerte einer bestimmten geometrischen Sequenz folgen. Analog zur Übergangsmatrix wurde neben einer Diagonalmatrix, die die Eigenwerte der Übergangsmatrix enthalten hat, eine Matrix V_m aufgestellt. Diese beinhaltet die entsprechenden Eigenvektoren der Matrix Π_m. Bei genauer Betrachtung der Matrix V_m konnte festgestellt werden, dass die erste und letzte Reihe Parallelen zu den Euler-Zahlen und dem Pascal'schen Dreieck aufweist. Letztgenannter Aspekt liefert auch die Begründung über den letzten Eintrag der letzten Spalte. Dieser kann nur zwei Werte annehmen und entscheidend dafür ist die Anzahl der zu addierenden Zahlen. Ganz am Ende konnten wir sogar feststellen, dass man die Wahrscheinlichkeit für einen Übertrag k bei der der Addition von m Zahlen berechnen kann. Grundlage war hierbei der Satz von Perron-Forbenius. Mithilfe von dem Satz konnte die Formel für die Berechnung von einem bestimmten Übertrag bei m Zahlen bewiesen werden.
Zum Abschluss wollen wir nochmal einen kleinen Ausblick wagen. Wir haben uns in den Kapiteln mit viel Theorie beschäftigt, doch nun wollen wir schauen, wo die aufgegriffenen Themen noch in unserem weiteren Alltagsleben zu finden sind.
Beispielsweise wird der Satz von Perron-Frobenius nicht nur im Sport benutzt, sondern auch bei Suchmaschinen, wie z.B. Google (vgl. [HW06, Kapitel 6.3]). Wenn man nach einem Begriff im Internet sucht, sortiert die Suchmaschine Google die Ergebnisse nach einer bestimmten Wichtigkeit. Die einzelnen Webseiten erscheinen dann dem Leser in einer bestimmten Liste. Die einzelnen Webseiten, die diesen gesuchten Begriff enthalten, werden dabei nach fallender Wichtigkeit sortiert. So erhält der Leser die "besten" Webseiten zu seinem gesuchten Begriff zuerst.
Aber auch die Markov-Ketten (vgl. Definition 3) finden im Alltag eine Anwendung. Zum Beispiel kann man bei verschiedenen Gesellschaftsspielen Markov-Ketten finden. Ein Beispiel ist dabei das Leiterspiel. Hier muss man mit seiner Spielfigur ein Spielfeld durchlaufen und dabei als Erster das Ziel erreichen. Auf dem Spielfeld befinden sich allerdings Hindernisse, die sogenannten Leitern. Je nachdem, auf was für ein Feld man trifft, kommt man näher ans Ziel oder entfernt sich durch das Absteigen der Leiter wieder vom Ziel. Ob man bei diesem Spiel weiter Richtung Ziel laufen darf oder

nicht, hängt immer nur von dem eigenen vorherigen Spielzug ab. Die Positionen dürfen doppelt besetzt werden und das Rausschmeißen ist untersagt. Das heißt nur der letzte eigene Spielzug beeinflusst den Spielverlauf. Die gegnerischen Spielzüge sind für den eigenen Verlauf des Parcours nicht zu beachten.

7 Anhang

Im Anhang befinden sich die Ergebnisse des Programms MATLAB [Mat21] für die Anwendungen des Satzes von Perron-Frobenius (vgl. Kapitel 2.1).

```
 % NFL-Beispiel
 % Eigenwerte von Matrix A ermitteln
 W=eig(A)

 W =

      0
 0.4317
-0.2000
-0.2317
 0.2500
-0.2500

% betragsmäßig größte Eigenwert ist der Spektralradius
% normierte Eigenvektoren bestimmen
[V,D]=eig(A)

V =

      0   -0.0000   -0.0000    0.0000    0.2238   -0.1715
      0    0.5470    0.7071    0.3875   -0.1279    0.6860
 1.0000   -0.0000    0.0000   -0.0000    0.8953    0.0000
      0   -0.0000    0.0000   -0.0000    0.2238    0.1715
      0    0.5470   -0.7071    0.3875   -0.1279   -0.6860
      0    0.6336    0.0000   -0.8364   -0.2558   -0.0000


 % Bundesliga Beispiel
 % Eigenwerte von Matrix B ermitteln
 L=eig(B)

 L =

41.9182 + 0.0000i
-2.0794 +11.3741i
-2.0794 -11.3741i
-2.5637 + 9.2432i
-2.5637 - 9.2432i
-2.5736 + 7.3532i
-2.5736 - 7.3532i
-2.3906 + 6.7567i
-2.3906 - 6.7567i
-3.0543 + 5.5471i
-3.0543 - 5.5471i
```

```
-3.0661 + 3.9251i
-3.0661 - 3.9251i
-2.0998 + 0.0000i
-2.0222 + 1.9558i
-2.0222 - 1.9558i
-2.1593 + 2.4405i
-2.1593 - 2.4405i

  % betragsmäßig größte Eigenwert ist der Spektralradius
  % normierte Eigenvektoren bestimmen
  [Q,V]=eig(B)

  Q =

Columns 1 through 3

 0.3904 + 0.0000i   0.0638 - 0.0441i   0.0638 + 0.0441i
 0.2979 + 0.0000i   0.2961 - 0.0071i   0.2961 + 0.0071i
 0.3069 + 0.0000i   0.0963 - 0.3239i   0.0963 + 0.3239i
 0.2775 + 0.0000i   0.2377 + 0.0039i   0.2377 - 0.0039i
 0.3067 + 0.0000i  -0.0192 + 0.0352i  -0.0192 - 0.0352i
 0.2475 + 0.0000i  -0.1255 + 0.1458i  -0.1255 - 0.1458i
 0.2518 + 0.0000i  -0.0432 - 0.1175i  -0.0432 + 0.1175i
 0.2439 + 0.0000i   0.0159 - 0.3344i   0.0159 + 0.3344i
 0.2068 + 0.0000i  -0.2395 + 0.2194i  -0.2395 - 0.2194i
 0.2060 + 0.0000i   0.1515 + 0.1908i   0.1515 - 0.1908i
 0.2094 + 0.0000i  -0.1276 - 0.0736i  -0.1276 + 0.0736i
 0.2115 + 0.0000i  -0.0777 - 0.2195i  -0.0777 + 0.2195i
 0.1827 + 0.0000i  -0.3412 + 0.0000i  -0.3412 + 0.0000i
 0.1556 + 0.0000i   0.0924 + 0.1553i   0.0924 - 0.1553i
 0.1577 + 0.0000i   0.2566 + 0.1564i   0.2566 - 0.1564i
 0.1599 + 0.0000i  -0.1001 - 0.1142i  -0.1001 + 0.1142i
 0.1429 + 0.0000i   0.1649 - 0.0472i   0.1649 + 0.0472i
 0.0848 + 0.0000i  -0.0195 + 0.1901i  -0.0195 - 0.1901i
```

Literatur

[For15] Otto Forster. *Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*. Heidelberg: Springer Spektrum, 2015.

[HLNS78] Wolf-Dieter Heller, Henner Lindenberg, Manfred Nuske, and Karl-Heinz Schriever. *Stochastische Systeme*. Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1978. Markoffketten, Stochastische Prozesse, Warteschlangen, de Gruyter Lehrbuch.

[Hol97] John M. Holte. Carries, combinatorics, and an amazing matrix. *Amer. Math. Monthly*, 104(2):138–149, 1997.

[HW06] Bertram Huppert and Wolfgang Willems. *Lineare Algebra*. Wiesbaden: Teubner, 2006.

[Mat21] The Mathworks, Inc., Natick, Massachusetts. *MATLAB version 9.11. (R2021b)*, 2021.

[Pet15] T. Kyle Petersen. *Eulerian numbers*. Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts: Basel Textbooks]. Birkhäuser/Springer, New York, 2015. With a foreword by Richard Stanley.

[Wea85] James R. Weaver. Centrosymmetric (cross-symmetric) matrices, their basic properties, eigenvalues, and eigenvectors. *Am. Math. Mon.*, 92:711–717, 1985.

[Wer] Jochen Werner. Merkwürdige Mathematik - Vorlesungsskript Uni Göttingen, 2013. `http://num.math.uni-goettingen.de/werner/schmankerl.pdf`. Eingesehen am 26.06.2021.