

Freie Universität Berlin

Erstbetreuer: Prof. Matthias Beck

Zweitbetreuer: Dr. Jean-Philippe Labbé

# Exponentielle Erzeugendenfunktionen und ihre Anwendung in der Graphentheorie

Bachelorarbeit

Vorgelegt am: 21. Juli 2021

Vorlegt von: Nikolaj Gus

Matrikelnummer: 5189302



## Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit eigenständig und ohne fremde Hilfe geschrieben habe. Textpassagen, die ich aus anderen Quellen wörtlich oder sinngemäß übernommen habe, wurden kenntlich gemacht. Diese Arbeit wurde in dieser Form keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt.

Berlin, 21. Juli 2021

*Nikolaj Gus*

Nikolaj Gus



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Erzeugendenfunktionen</b>	<b>1</b>
2.1	Erzeugendenfunktionen als formale Potenzreihen . . . . .	1
2.2	Zählen von Strukturen mit exponentiellen Erzeugendenfunktionen .	7
<b>3</b>	<b>Binärbäume</b>	<b>14</b>
3.1	Planare Binärbäume . . . . .	14
3.2	Die exponentielle Erzeugendenfunktion markierter, planarer Binärbäume . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Die exponentielle Erzeugendenfunktion markierter, gewurzelter Bäume</b>	<b>22</b>
<b>5</b>	<b>Die exponentielle Erzeugendenfunktion markierter, 2-regulärer Graphen</b>	<b>26</b>
	<b>Literatur</b>	<b>33</b>



# 1 Einleitung

Die enumerative Kombinatorik ist ein Teilgebiet der Mathematik, das sich mit der Bestimmung von Kardinalitäten endlicher Mengen auseinandersetzt. Die Kunst dabei ist es, Elemente einer endlichen Menge zu zählen, ohne jedes Element einzeln zu prüfen. Ab dem Jahr 1666, in dem Gottfried Wilhelm Leibniz die erste Abhandlung der Kombinatorik ("Dissertatio de Arte Combinatoria") veröffentlichte, gewann dieses Teilgebiet zunehmend an Komplexität. Dies führte zu neuen und kreativen Techniken des Abzählens diskreter Strukturen. Eine der bekanntesten Techniken ist die Anwendung der Erzeugendenfunktionen, die heute nicht aus der Kombinatorik wegzudenken ist. Diese Funktionen sind formale Potenzreihen, welche die Addition und Multiplikation von Polynomen übernehmen. Demnach ist die Erzeugendenfunktion Gegenstand der Analysis, die jedoch einen viel größeren Nutzen in kombinatorischen Abzählproblemen findet.

Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt in der Anwendung exponentieller Erzeugendenfunktionen auf Abzählprobleme in der Graphentheorie. Graphen werden also lediglich aus der kombinatorischen Perspektive untersucht. Konkreter werden markierte, planare Binärbäume (Kapitel 3), markierte, gewurzelte Bäume (Kapitel 4) und markierte, 2-reguläre Graphen (Kapitel 5) definiert und unter Benutzung exponentieller Erzeugendenfunktionen gezählt. Dafür wird im Kapitel 2 dieser Arbeit eine Grundlage geschaffen und der kombinatorische Zusammenhang von Verknüpfungen exponentieller Erzeugendenfunktionen erklärt sowie bewiesen.

## 2 Erzeugendenfunktionen

### 2.1 Erzeugendenfunktionen als formale Potenzreihen

Dieses Kapitel enthält elementare Definitionen und Aussagen für die Arbeit mit formalen Potenzreihen. Besonders die Multiplikation und Komposition der Erzeugendenfunktionen nehmen im Verlauf dieser Arbeit einen wichtigen Stellenwert ein, weswegen wir folgend die Grundlage dafür bilden.

**Definition 2.1.** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine Folge. Dann ist die formale Potenzreihe  $G_a(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$  die **Erzeugendenfunktion** von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ .

**Beispiel 2.1.** Eine triviale Erzeugendenfunktion erhalten wir durch die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  mit  $a_n = 1$  für alle  $n$  aus  $\mathbb{N}_0$ :

$$G_a(x) = \sum_{n \geq 0} x^n.$$

Ein weiteres Beispiel liefert uns die Folge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  mit  $(1, -1, 0, 0, 0, 0, \dots)$ . Daraus entspringt die Erzeugendenfunktion

$$G_b(x) = 1 - x.$$

Erstaunlicherweise sind diese beiden Erzeugendenfunktionen multiplikativ invers zueinander. Das werden wir zeigen, nachdem wir die nötige Grundlage gelegt haben.

Im folgenden Abschnitt werden wir mit formalen Potenzreihen über Ringen arbeiten. Damit sind Reihen der Form  $\sum_{n \geq 0} \lambda_n x^n$  gemeint, deren Koeffizienten  $\lambda_0, \lambda_1, \dots$  in einem Ring  $R$  leben. Die Menge aller formalen Potenzreihen über  $R$  bezeichnen wir mit  $R[[x]]$ . Bemerkenswert ist, dass  $R[[x]]$  mit der Addition

$$\sum_{n \geq 0} \gamma_n x^n + \sum_{n \geq 0} \delta_n x^n = \sum_{n \geq 0} (\gamma_n + \delta_n) x^n \quad (1)$$

und der Multiplikation über das Cauchy-Produkt

$$\left( \sum_{n \geq 0} \gamma_n x^n \right) \left( \sum_{n \geq 0} \delta_n x^n \right) = \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{k=0}^n \gamma_k \delta_{n-k} \right) x^n \quad (2)$$

(mit  $\gamma_n, \delta_n \in R$  für jedes  $n \in \mathbb{N}_0$ ) den Ring der formalen Potenzreihen über  $R$  bildet. Wir können sogar einen Schritt weiter gehen und guten Gewissens behaupten, dass es sich bei  $(R[[x]], +, \cdot)$  um einen kommutativen Ring mit 1 handelt. Das multiplikative Inverse erhalten wir hierbei durch die formale Potenzreihe  $1 = 1x^0 + 0x^1 + 0x^2 + \dots$ .

Der nächste Satz liefert uns eine Aussage über multiplikative Inverse im Ring  $(R[[x]], +, \cdot)$ .

**Satz 2.1.** Für jede formale Potenzreihe  $G_a(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \in R[[x]]$  existiert eine formale Potenzreihe  $G_b(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n \in R[[x]]$  mit  $G_a(x)G_b(x) = 1$  genau dann, wenn  $a_0$  invertierbar in  $R$  ist.

*Beweis.* Wir werden als erstes zeigen, dass  $a_0$  invertierbar in  $R$  ist, unter der Annahme, dass es für ein beliebiges Element  $G_a(x) \in R[[x]]$  ein  $G_b(x) \in R[[x]]$  gibt, sodass  $G_a(x)G_b(x) = 1$  gilt. Unter der Annahme, dass  $a_0$  invertierbar in  $R$  ist, konstruieren wir anschließend das multiplikative Inverse zu einem beliebigen Element  $G_a(x) \in R[[x]]$ .

Seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  zwei Folgen in  $R$  und  $G_a(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ ,  $G_b(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n$  formale Potenzreihen mit  $G_a(x)G_b(x) = 1$ . Die 1 ist die formale Potenzreihe der Folge  $(1, 0, 0, \dots)$ , woraufhin nach Anwendung des Cauchy-Produkts (2)  $a_0 b_0 = 1$  folgt. Damit ist  $a_0$  invertierbar in  $R$ .

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine Folge in  $R$  und sei  $a_0$  invertierbar. Dann existiert ein  $b_0 \in R$  mit  $a_0 b_0 = 1$ . Deshalb gilt

$$G_a(x)G_b(x) = 1 + \sum_{n \geq 1} \left( \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) x^n.$$

Soll  $G_a(x)G_b(x) = 1$  gelten, muss  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  so gewählt werden, dass

$$\sum_{n \geq 1} \left( \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) x^n = 0$$

gilt. Daher muss  $\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = 0$  für  $n \geq 1$  erfüllt sein. Also sei

$$b_0 = \frac{1}{a_0} \quad \text{und} \quad b_n = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k} \tag{3}$$

für jede natürliche Zahl  $n \geq 1$ . Damit ist  $G_a(x)G_b(x) = 1$  erfüllt. □

Wie wir im nächsten Beispiel sehen werden, gibt es Erzeugendenfunktionen, die recht interessante multiplikative Inverse haben. Ein ziemlich bekanntes Beispiel ist die Reihe  $\sum_{n \geq 0} x^n$ , die  $1 - x$  als Inverses aufweist. Das kann direkt mit der Anwendung des Cauchy-Produkts nachgewiesen werden. Folgend wird das mit der Konstruktion der Folge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  aus dem Beweis für Satz 2.1 gezeigt.

**Beispiel 2.2.** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  die Folge mit  $a_n = 1$  für jedes Folgenglied. Dann ist die zugehörige Erzeugendenfunktion  $G_a(x)$  invers zu  $G_b(x) = 1 - x$ , welche durch die Folge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  mit  $b_0 = 1$ ,  $b_1 = -1$  und  $b_n = 0$  für  $n \geq 2$  erzeugt wird.

*Beweis.* Nach Anwendung von (3) folgt:

$$b_0 = \frac{1}{a_0} = 1 \quad \text{und} \quad b_1 = -(a_1 b_0) = -1$$

$$b_2 = -(a_1 b_1 + a_2 b_0) = -(-1 + 1) = 0$$

$$b_3 = -(a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0) = -(0 - 1 + 1) = 0.$$

Sei  $n \geq 2$ . Betrachtet man nun  $b_2, b_3, \dots, b_{n-1} = 0$  als Induktionsvoraussetzung, so folgt:

$$\begin{aligned} b_n &= -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k} = -(b_{n-1} + b_{n-2} + \dots + b_2 + b_1 + b_0) \\ &= -(-1 + 1) = 0. \end{aligned}$$

□

Die berühmte Gleichheit  $\sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$  ist uns aus der Analysis als eine Konvergenz für  $|x| < 1$  bekannt. Es ist interessant zu sehen, dass die Konvergenz in der Welt der formalen Potenzreihen keine Rolle spielt. Für die Theorie der formalen Potenzreihen müssen wir uns nicht mit Konvergenzfragen auseinandersetzen, da es sich bei  $x$  um keine Variable als Platzhalter für eine bestimmte Zahl handelt, sondern um eine Unbestimmte.

Folgend wird die Komposition formaler Potenzreihen im Ring  $R$  definiert.

**Definition 2.2.** Seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  mit  $b_0 = 0$  Folgen aus  $R$  und  $G_a(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$  und  $G_b(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n$  die zugehörigen formalen Potenzreihen aus  $R[[x]]$ . Dann ist ihre Komposition definiert durch

$$(G_a \circ G_b)(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \left( \sum_{k \geq 0} b_k x^k \right)^n = a_0 + \sum_{n \geq 1} \sum_{k=1}^n a_k \left( \sum_{\substack{v_1 + \dots + v_k = n \\ v_1, v_2, \dots, v_k \geq 1}} b_{v_1} b_{v_2} \cdots b_{v_k} \right) x^n. \quad (4)$$

**Bemerkung 2.1.** Seien  $G_a(x)$ ,  $G_b(x)$  und  $G_c(x)$  formale Potenzreihen aus  $R[[x]]$  mit  $G_b(0) = G_c(0) = 0$ . Dann gilt

$$((G_a \circ G_b) \circ G_c)(x) = (G_a \circ (G_b \circ G_c))(x).$$

Das ist bekannt als Assoziativität der formalen Potenzreihen. Diese Aussage wird beispielsweise in [[3], S. 6] bewiesen.

Die nächste Definition führt eine allgemeine Schreibweise für die Koeffizienten formaler Potenzreihen ein.

**Definition 2.3.** Sei  $G_a(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$  eine formale Potenzreihe. Dann ist

$$[x^n]\{G_a(x)\} = a_n$$

ein Ausdruck für den Koeffizienten von  $x^n$ .

Für den nächsten Satz ist es wichtig, dass wir mit formalen Potenzreihen  $G_a(x) \in R[[x]]$  arbeiten, die  $[x^0]\{G_a(x)\} = 0$  erfüllen. Wir definieren  $P_R[[x]]$  als die Menge aller Potenzreihen über dem Ring  $R$ , für die das gilt.

**Satz 2.2.** Sei  $G_a(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \in P_R[[x]]$ . Es gibt genau dann eine Potenzreihe  $G_b(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n \in P_R[[x]]$  mit  $(G_a \circ G_b)(x) = (G_b \circ G_a)(x) = x$ , wenn  $a_1$  invertierbar in  $R$  ist.

*Beweis.* Im ersten Teil des Beweises wird, unter der Annahme  $(G_a \circ G_b)(x) = x$ , gezeigt, dass  $a_1$  invertierbar in  $R$  ist. Danach konstruieren wir (unter der Annahme, dass  $a_1$  invertierbar in  $R$  ist) eine Folge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ , deren formale Potenzreihe  $(G_b \circ G_a)(x) = x$  erfüllt. Anschließend zeigen wir die Gleichheit  $(G_a \circ G_b) = (G_b \circ G_a)$ .

Seien  $G_a(x)$  und  $G_b(x)$  Elemente aus  $P_R[[x]]$  mit Koeffizienten, die durch die Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  beschrieben sind. Damit gilt  $a_0 = b_0 = 0$ . Ausgehend von der Definition 2.2 und  $(G_a \circ G_b) = x$  gilt

$$\sum_{n \geq 1} \sum_{k=1}^n a_k \cdot \left( \sum_{\substack{v_1+v_2+\dots+v_k=n \\ v_1, v_2, \dots, v_k \geq 1}} b_{v_1} b_{v_2} \cdots b_{v_k} \right) x^n = x.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist die formale Potenzreihe der Folge  $(0, 1, 0, 0, 0, \dots)$ , weswegen

$$a_1 b_1 = [x]\{(G_a \circ G_b)(x)\} = [x]\{x\} = 1$$

gilt. Damit ist  $a_1$  invertierbar in  $R$ .

Ist  $a_1$  invertierbar in  $R$ , so existiert ein  $b_1 \in R$  mit  $a_1 b_1 = 1$ . In den nächsten Schritten soll die Folge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  so konstruiert werden, dass  $(G_b \circ G_a)(x) = x$  erfüllt ist. Die formale Potenzreihe der Folge  $(0, 1, 0, 0, \dots)$  ist genau  $x$ . Es gilt also

$$[x]\{(G_b \circ G_a)(x)\} = b_1 a_1 = 1.$$

Dann muss für alle  $n \geq 2$

$$[x^n]\{(G_b \circ G_a)(x)\} = \sum_{k=1}^n b_k \sum_{\substack{v_1+v_2+\dots+v_k=n \\ v_1, v_2, \dots, v_k \geq 1}} a_{v_1} a_{v_2} \cdots a_{v_k} = 0$$

erfüllt sein. Eine äquivalente Umformung liefert die Rekursion

$$b_1 = \frac{1}{a_1}$$

und

$$b_n = -\frac{1}{(a_1)^n} \sum_{k=1}^{n-1} b_k \sum_{\substack{v_1+v_2+\dots+v_k=n \\ v_1, v_2, \dots, v_k \geq 1}} a_{v_1} a_{v_2} \cdots a_{v_k} \quad \text{für } n \geq 2.$$

Diese Rekursion ist aus  $(G_b \circ G_a)(x) = x$  entsprungen, weswegen selbige Gleichheit nun erfüllt ist.

Schließlich muss noch die Gleichheit  $(G_b \circ G_a)(x) = (G_a \circ G_b)(x)$  gezeigt werden. Angenommen,  $G_c(x)$  ist eine formale Potenzreihe aus  $P_R[[x]]$  mit  $(G_c \circ G_b)(x) = x$ . Das dürfen wir annehmen, da wir die Existenz einer solchen Reihe  $G_c(x)$  eben nachgewiesen haben. Dann gilt

$$\begin{aligned} G_c(x) &= G_c((G_b \circ G_a)(x)) = (G_c \circ (G_b \circ G_a))(x) \\ &\stackrel{2.1}{=} ((G_c \circ G_b) \circ G_a)(x) \\ &= (G_c \circ G_b)(G_a(x)) \\ &= G_a(x). \end{aligned}$$

Damit folgt aus der Assoziativität der Komposition dieser formalen Potenzreihen (Bemerkung 2.1) die zu zeigenden Gleichheiten  $(G_a \circ G_b)(x) = (G_b \circ G_a)(x) = x$ .  $\square$

**Definition 2.4.** Sei  $G_a(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$  eine formale Potenzreihe aus  $R[[x]]$ . Dann ist ihre Ableitung definiert durch

$$G_a'(x) = \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}. \quad (5)$$

**Definition 2.5.** Sei  $G_a(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$  eine formale Potenzreihe aus  $R[[x]]$ . Dann ist ihr Integral definiert durch

$$\int G_a(x) dx = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}. \quad (6)$$

Mit der nächsten Definition erhalten wir die exponentielle Erzeugendenfunktion, die im Fokus dieser Arbeit betrachtet werden soll. Verglichen mit der regulären Erzeugendenfunktion, bietet sie uns gewisse Vorteile in ihrer Anwendung, die im nächsten Unterkapitel 2.2 verdeutlicht werden.

**Definition 2.6.** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine Folge. Dann ist  $E_a(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}$  die **exponentielle Erzeugendenfunktion** der Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ .

**Bemerkung 2.2.** Die Addition und Multiplikation aus (1) und (2) werden übernommen. Dabei fällt bei der Multiplikation folgende Besonderheit auf:

$$\begin{aligned} \left( \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} \right) \cdot \left( \sum_{n \geq 0} b_n \frac{x^n}{n!} \right) &\stackrel{(2)}{=} \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} \frac{b_{n-k}}{(n-k)!} \right) x^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k b_{n-k} \right) \frac{x^n}{n!}. \end{aligned} \quad (7)$$

## 2.2 Zählen von Strukturen mit exponentiellen Erzeugendenfunktionen

Angenommen, es wird nach der Anzahl an Möglichkeiten gesucht, Elemente einer  $n$ -elementigen Menge auf eine bestimmte Art anzuordnen. Betrachtet wird der Koeffizient  $f_n$  einer exponentiellen Erzeugendenfunktion

$$E_f(x) = \sum_{n \geq 0} f_n \frac{x^n}{n!}$$

als die Anzahl eben dieser Möglichkeiten. Das ist die Annahme auf der diese Arbeit basiert. Die Anordnungsarten werden folgend als Strukturen bezeichnet. Strukturen einer bestimmten Art werden z.B.  $\alpha$ - oder  $\beta$ -Strukturen genannt. Ausgehend von einer Menge  $A$  mit genau  $n$  Elementen sind beispielsweise alle möglichen planaren Binärbäume mit genau  $n$  markierten Knoten Strukturen (dazu mehr in der Bemerkung 3.2).

Ein weiteres Beispiel für Strukturen auf einer endlichen Menge  $B$  sind ihre Teilmengen (dazu mehr im Beispiel 2.3).

**Beispiel 2.3.** Seien die Teilmengen einer gegebenen, endlichen Menge  $\alpha$ -Strukturen. Uns ist bekannt, dass eine  $n$ -elementige Menge genau  $2^n$  mögliche Teilmengen hat. Die zugehörige Folge der  $\alpha$ -Strukturen ist damit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  mit  $a_n = 2^n$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  beschrieben.

Dieses Beispiel werden wir nach der nötigen Vorbereitung wieder aufgreifen, um die Aussage mithilfe exponentieller Erzeugendenfunktionen nachzuweisen.

Strukturen auf endlichen Mengen können auch sehr einfach aussehen. Ein Beispiel dafür bildet die nächste Definition, die sich im Verlauf dieser Arbeit als äußerst hilfreich herausstellen wird.

**Definition 2.7.** Die *trivialen Strukturen einer endlichen Menge* haben die zugehörige Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  mit  $a_n = 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ . Daraus entspringt die exponentielle Erzeugendenfunktion  $\sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} = e^x$ .

**Bemerkung 2.3.** Die trivialen Strukturen der nicht-leeren, endlichen Menge hat die zugehörige Folge  $(0, 1, 1, 1, 1, \dots)$ . Die exponentielle Erzeugendenfunktion zu dieser Struktur lautet  $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n!} = e^x - 1$ .

Die trivialen Strukturen der 1-elementigen Menge hat die zugehörige Folge  $(0, 1, 0, 0, 0, \dots)$ . Ihre Erzeugendenfunktion ist einfach nur  $x$ .

Was exponentielle Erzeugendenfunktionen zu einem hilfreichen Werkzeug beim Lösen einiger Probleme in der Kombinatorik macht, sind ihre Verknüpfungen. Folgend werden wir ihre Addition, Multiplikation und Komposition im kombinatorischen Zusammenhang besprechen.

Angenommen, es werden  $\alpha$ - und  $\beta$ -Strukturen auf endlichen Mengen betrachtet. Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  die Folge, deren Folgenglied  $a_n$  (für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ ) der Anzahl an  $\alpha$ -Strukturen auf einer  $n$ -elementigen Menge entspricht. Sei  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  die Folge, die im gleichen Verhältnis zu den  $\beta$ -Strukturen steht. Werden ihre exponentiellen Erzeugendenfunktionen addiert, entsteht die Erzeugendenfunktion der  $\alpha \oplus \beta$ -Strukturen mit

$$E_c(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} + \sum_{n \geq 0} b_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) \frac{x^n}{n!}.$$

Die Anzahl der  $\alpha \oplus \beta$ -Strukturen auf einer  $n$ -elementigen Menge wird also durch die Folge  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  mit  $c_n = a_n + b_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  beschrieben. In kombinatorischer Hinsicht ist die Addition zweier Erzeugendenfunktionen dann hilfreich, wenn eine endliche Menge, deren Kardinalität gesucht ist, in Teilmengen mit bekannten Kardinalitäten klassifiziert wird.

Für die folgende Definition 2.8 und den Beweis des Satzes 2.3 orientieren wir uns an [7].

**Definition 2.8.** *Sei  $A$  eine endliche Menge. Ausgehend von beliebigen  $\alpha$ - und  $\beta$ -Strukturen bestehen die  $\alpha \otimes \beta$ -Strukturen aus*

- einer geordneten Partition  $A = A_1 \cup A_2$  in zwei disjunkte Teilmengen
- einer  $\alpha$ -Struktur auf der Menge  $A_1$
- einer  $\beta$ -Struktur auf der Menge  $A_2$

wobei wir die  $\alpha$ - und  $\beta$ -Strukturen unabhängig voneinander wählen.

**Satz 2.3.** *Seien  $E_a(x)$  die exponentielle Erzeugendenfunktion der  $\alpha$ -Strukturen und  $E_b(x)$  die exponentielle Erzeugendenfunktion der  $\beta$ -Strukturen auf einer endlichen Menge  $A$ . Dann ist*

$$E_a(x)E_b(x)$$

*die exponentielle Erzeugendenfunktion der  $\alpha \otimes \beta$ -Strukturen auf  $A$ .*

*Beweis.* Sei  $E_d(x)$  die exponentielle Erzeugendenfunktion der  $\alpha \otimes \beta$ -Strukturen. Wir definieren  $a_n$  als die Anzahl an  $\alpha$ -Strukturen und  $b_n$  als die Anzahl an  $\beta$ -Strukturen auf einer  $n$ -elementigen Menge  $A$ . Wie in der Definition 2.8 sei  $A = A_1 \cup A_2$  eine geordnete Partition, wobei wir  $\alpha$ -Strukturen auf  $A_1$  und  $\beta$ -Strukturen auf  $A_2$  betrachten. Angenommen, wir haben genau  $k$  Elemente in  $A_1$  (mit  $k \in [n] \cup \{0\}$ ). Da die Partition  $A = A_1 \cup A_2$  eine disjunkte Vereinigung von  $A_1$  und  $A_2$  ist, folgt  $|A_2| = n - k$ . Es gibt genau  $\binom{n}{k}$  derartige Partitionen. Wir haben also genau  $a_k$  mögliche  $\alpha$ -Strukturen auf  $A_1$  und genau  $b_{n-k}$  mögliche  $\beta$ -Strukturen auf  $A_2$ . Summiert über alle  $k$  aus  $[n] \cup \{0\}$  erhalten wir

$$\left[ \frac{x^n}{n!} \right] \{E_d(x)\} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^n n! \frac{a_k}{k!} \frac{b_{n-k}}{(n-k)!} = \left[ \frac{x^n}{n!} \right] \{E_a(x)E_b(x)\}$$

für jedes  $n$  aus  $\mathbb{N}_0$ . Damit gilt

$$E_d(x) = E_a(x)E_b(x).$$

□

**Bemerkung 2.4.** Sei  $A = \bigcup_{i=1}^k A_i$  eine geordnete Partition in  $k$  Blöcke. Angenommen, es werden  $\alpha_i$ -Strukturen auf dem Block  $A_i$  betrachtet ( $i \in [k]$ ). Das Multiplikationsprinzip aus der Definition 2.8 und dem Satz 2.3 lässt sich auf die  $(\alpha_1 \otimes \alpha_2 \otimes \dots \otimes \alpha_k)$ -Strukturen (oder kurz:  $(\bigotimes_{i=1}^k \alpha_i)$ -Strukturen) erweitern. Die exponentielle Erzeugendenfunktion dieser Strukturen ist dann gegeben durch

$$\prod_{i=1}^k A_i(x),$$

wobei  $A_i(x)$  die exponentielle Erzeugendenfunktion der  $\alpha_i$ -Strukturen ist.

Nun wird das Beispiel 2.3 wieder aufgegriffen. Gesucht ist die Anzahl an Teilmengen einer  $n$ -elementigen Menge  $A$ . Mit der Wahl einer beliebigen Teilmenge  $A_1$  von  $A$  erhalten wir das eindeutige Komplement  $A_2 = A \setminus A_1$ . Deswegen haben wir auf  $A$  genau so viele Partitionen wie Teilmengen. Betrachtet man eine geordnete Partition  $A = A_1 \cup A_2$  und die trivialen Strukturen einer endlichen Menge aus der Definition 2.7 als  $\alpha$ - und  $\beta$ -Strukturen auf  $A_1$  und  $A_2$ , so erhalten wir laut dem

Satz 2.3

$$\begin{aligned}
 E_a(x) \cdot E_b(x) &= \left( \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} \right) \cdot \left( \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} \right) \\
 &= \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \right) \frac{x^n}{n!} \\
 &= \sum_{n \geq 0} 2^n \frac{x^n}{n!}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Der Koeffizient  $2^n$  entspricht genau der Anzahl an Teilmengen einer  $n$ -elementigen Menge aus dem Beispiel 2.3. Dieses vergleichsweise einfache Beispiel zeigt exemplarisch, dass die bisher beschriebene Anwendung der Erzeugendenfunktion durchaus zielführend ist.

Mit der nächsten Definition und dem nächsten Satz werden wir die Kombinatorik hinter der Komposition exponentieller Erzeugendenfunktionen behandeln.

Bei der folgenden Definition 2.9 und dem Beweis des darauffolgenden Satzes 2.4, haben wir uns an [7] orientiert.

**Definition 2.9.** Sei  $A$  eine endliche Menge. Ausgehend von beliebigen  $\alpha$ - und  $\beta$ -Strukturen bestehen die Kompositionsstrukturen  $\alpha \circ \beta$  aus

- einer beliebigen Partition  $A = \bigcup_{i=1}^k A_i$
- voneinander unabhängig gewählten  $\beta$ -Strukturen auf jedem Block  $A_i$
- $\alpha$ -Strukturen auf der Menge  $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ .

**Satz 2.4.** Seien  $E_a(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}$  und  $E_b(x) = \sum_{n \geq 0} b_n \frac{x^n}{n!}$  die exponentiellen Erzeugendenfunktionen der  $\alpha$ - und  $\beta$ -Strukturen und sei  $E_b(0) = 0$ . Dann ist die exponentielle Erzeugendenfunktion der  $\alpha \circ \beta$ -Strukturen durch die Komposition

$$E_a(E_b(x))$$

gegeben.

*Beweis.* Um den Satz 2.4 zu beweisen, werden wir zu Beginn die exponentielle Erzeugendenfunktion der  $\alpha \circ \beta$ -Strukturen für die Partition  $A = \bigcup_{i=1}^k A_i$  mit fixiertem  $k \in \mathbb{N}_0$  bestimmen. Anschließend summieren wir über  $k$ , um die Gleichheit zu  $E_a(E_b(x))$  nachzuweisen.

Wie in der Definition 2.9 ist  $A$  eine endliche Menge und  $A = \bigcup_{i=1}^k A_i$  eine Partition mit fixiertem  $k \in \mathbb{N}_0$ . Jede Teilmenge  $A_i$  ist dabei nicht leer. Auf der Menge  $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$  werden die  $\alpha$ -Strukturen betrachtet. Da es sich hierbei um eine  $k$ -elementige Menge handelt, gibt es auf  $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$  genau  $a_k$   $\alpha$ -Strukturen. Auf jeder Teilmenge  $A_i$  werden unabhängig voneinander  $\beta$ -Strukturen betrachtet. Wegen der Bemerkung 2.4, ist die exponentielle Erzeugendenfunktion der  $(\bigotimes_{i=1}^k \beta)$ -Strukturen durch  $(E_b(x))^k$  gegeben. Wir erhalten

$$a_k E_b(x)^k.$$

Nun gibt es genau  $k!$  mögliche, geordnete  $k$ -Tupel der Blöcke  $A_i$ , die wir beim Aufstellen der exponentiellen Erzeugendenfunktion berücksichtigt haben. Deswegen wird unser Term noch mit  $\frac{1}{k!}$  multipliziert. Summieren wir den resultierenden Term über alle  $k \in \mathbb{N}_0$ , erhalten wir

$$\sum_{k \geq 0} a_k \frac{E_b(x)^k}{k!} = E_a(E_b(x)).$$

□

Wir wissen nun, dass die Komposition exponentieller Erzeugendenfunktionen beim Zählen bestimmter Strukturen hilft. Bisher haben wir mit der Definition 2.2 lediglich festgestellt, wie reguläre Erzeugendenfunktionen in ihrer Hintereinanderausführung aussehen. Nehmen wir uns also zwei exponentielle Erzeugendenfunktionen  $E_a(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n$  und  $E_b(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{b_n}{n!} x^n$  mit  $E_b(0) = 0$  und schreiben sie als

Komposition wie in der Definition 2.2, erhalten wir

$$\begin{aligned}
E_a(E_b(x)) &= \frac{a_0}{0!} + \sum_{n \geq 1} \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k!} \left( \sum_{\substack{v_1+v_2+\dots+v_k=n \\ v_1, v_2, \dots, v_k \geq 1}} \frac{b_{v_1} b_{v_2} \cdots b_{v_k}}{v_1! v_2! \cdots v_k!} \right) x^n \\
&= a_0 + \sum_{n \geq 1} \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k!} \left( \sum_{\substack{v_1+v_2+\dots+v_k=n \\ v_1, v_2, \dots, v_k \geq 1}} \frac{n!}{v_1! v_2! \cdots v_k!} b_{v_1} b_{v_2} \cdots b_{v_k} \right) \frac{x^n}{n!}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Der Faktor  $\frac{n!}{v_1! v_2! \cdots v_k!}$  wird auch mit  $\binom{n}{v_1, v_2, \dots, v_k}$  abgekürzt (siehe z.B. [[1], S. 16]), den wir als Polynomkoeffizient oder Multinomialkoeffizient bezeichnen. Er ist gleich der Anzahl an möglichen Partitionen  $A = \bigcup_{i=1}^k A_i$  mit  $|A| = n$  und  $|A_i| = v_i$ . Eine schönere Art die Komposition aus (9) aufzuschreiben ist also

$$E_a(E_b(x)) = a_0 + \sum_{n \geq 0} \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k!} \left( \sum_{\substack{v_1+v_2+\dots+v_k=n \\ v_1, v_2, \dots, v_k \geq 1}} \binom{n}{v_1, v_2, \dots, v_k} b_{v_1} b_{v_2} \cdots b_{v_k} \right) \frac{x^n}{n!}.$$

Besonders die Multiplikation und Komposition verdeutlichen den Wert exponentieller Erzeugendenfunktionen für die Kombinatorik. Sowohl der Binomialkoeffizient als auch der Multinomialkoeffizient zählen Partitionen auf endlichen Mengen. Ihr Auftreten in der Multiplikation (bzw. Komposition) von exponentiellen Erzeugendenfunktionen ermöglicht es uns, Strukturen auf endlichen Mengen zu zählen, die sich in der Positionierung der Mengenelemente unterscheiden. In enumerativen Prozessen der Graphentheorie sind das in den meisten Fällen Graphen mit markierten Knotenmengen. Auf den restlichen Seiten dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit kombinatorischen Problemen in der Graphentheorie.

## 3 Binärbäume

Dieses Kapitel ist in zwei Teile gegliedert und beschäftigt sich erstmalig mit der Graphentheorie. Zu Beginn müssen wir grundlegende Begriffe klären, um markierte, planare Binärbäume zu definieren. Für einen umfangreicheren Überblick in der Graphentheorie, ist zum Beispiel Reinhard Diestels *Graphentheorie* [5] zu empfehlen. Nachdem wir planare Binärbäume definiert haben, gehen wir über in den zweiten Teil. Unser Fokus wird darauf liegen, die exponentielle Erzeugendenfunktion der markierten, planaren Binärbäume aufzustellen und den Koeffizienten von  $\frac{x^n}{n!}$  der formalen Potenzreihe zu extrahieren. Dieser Koeffizient ist gleich der Anzahl an planaren Binärbäumen mit genau  $n$  markierten Knoten.

### 3.1 Planare Binärbäume

Glücklicherweise bietet die Graphentheorie vielseitige Möglichkeiten, Graphen und Zusammenhänge in Abbildungen darzustellen. Diesem Vorteil werden wir uns in dieser Arbeit bedienen. Ein Graph  $G$  ist ein Paar  $(V, E)$ , wobei  $V$  die Menge an Knoten (auch Ecken genannt) und  $E$  die Menge an Kanten beschreibt, die man sich als Relationen zwischen je zwei Knoten aus  $V$  vorstellen kann. Folgende Definitionen und Bemerkungen bilden die mathematische Grundlage für planare Binärbäume.

**Definition 3.1.** *Ein Graph  $G$  ist ein Paar  $(V, E)$  bestehend aus einer Menge  $V$  an **Knoten** und einer Menge  $E$  an **Kanten**. Dabei ist  $E$  eine Teilmenge aller 2-elementigen Teilmengen von  $V$ .*

*Eine Kante  $\{v_1, v_2\} \in E$  wird als Verbindungslinie zwischen zwei Knoten  $v_1$  und  $v_2$  dargestellt.*

**Definition 3.2.** *Ein **gerichteter Graph**  $G = (V, E)$  besteht aus einer Menge  $V$  an Knoten und einer Menge  $E$  an Kanten. Dabei ist  $E$  eine Teilmenge aller Paare aus  $V$ .*

*Eine Kante  $(v_1, v_2) \in E$  wird als Pfeil verlaufend von  $v_1$  nach  $v_2$  dargestellt.*

**Definition 3.3.** *Ein Graph  $G = (V, E)$  heißt **markiert** genau dann, wenn jeder Knoten in  $V$ , durch eine bijektive Abbildung  $l : V \rightarrow L$ , einem Element aus der Menge  $L$  zugewiesen wird.*

Die Definition 3.3 hat in dieser Arbeit einen hohen Stellenwert, da wir nur Graphen zählen, deren Knoten markiert sind. Unter der Voraussetzung  $|V| = n$  werden wir die Menge an Markierungen  $L$  oft als die Menge der ersten  $n$  natürlichen Zahlen festlegen.

**Definition 3.4.** Ein **Kantenzug** im Graphen  $G = (V, E)$  ist ein Tupel  $Z = (v_1, v_2, \dots, v_k)$  mit  $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$  für  $i \in \{1, 2, 3, \dots, k-1\}$ .

**Definition 3.5.** Ein **Zykel** in  $G = (V, E)$  ist ein Kantenzug  $W = (v_1, v_2, \dots, v_k)$  mit  $v_1 = v_k$ .

**Definition 3.6.** Ein Graph  $G = (V, E)$  wird genau dann als **zusammenhängend** bezeichnet, wenn es für zwei beliebige Knoten  $v, w \in V$  mit  $v \neq w$  einen Kantenzug  $P = (v, v_1, \dots, v_k, w)$  gibt.

**Definition 3.7.** Ein **Baum**  $B = (V, E)$  ist ein zusammenhängender, zyklfreier Graph.

**Definition 3.8.** Sei  $B = (V, E)$  ein Baum. Ein **Unterbaum** von  $B$  ist ein Baum  $U = (W, F)$  mit  $W \subseteq V$  und  $F \subseteq E$ . Dabei ist  $F$  eine Teilmenge aller 2-elementigen Teilmengen von  $W$ .

**Definition 3.9.** Ein **Binärbaum**  $B = (V, E)$  ist ein gerichteter Baum mit folgenden Einschränkungen:

- (1) Ein Binärbaum mit leerer Knotenmenge bezeichnen wir als leeren Binärbaum.
- (2) Es existiert genau ein Knoten  $w \in V$ , zu dem es keine Kante  $(v, w) \in E$  gibt. Dieser Knoten wird als Wurzel bezeichnet.
- (3) Für einen beliebigen Knoten  $v \in V$  gibt es maximal zwei Paare  $(v, a_1), (v, a_2) \in E$ .

In der Abbildung 1 sind zwei unterschiedliche Darstellungen für den selben markierten Binärbaum gegeben, wobei wir die rechte Version präferieren.

**Definition 3.10.** Sei  $B = (V, E)$  ein Binärbaum und  $(v_1, v_2)$  eine Kante aus  $E$ . Dann nennen wir  $v_2$  **Kindknoten** von  $v_1$  und den Unterbaum  $U = (V', E')$ , der  $v_2$  als Wurzel aufweist, **Kind** von  $v_1$ . Hat  $v_1$  keinen Kindknoten, so ist sein Kind als leerer Binärbaum definiert.

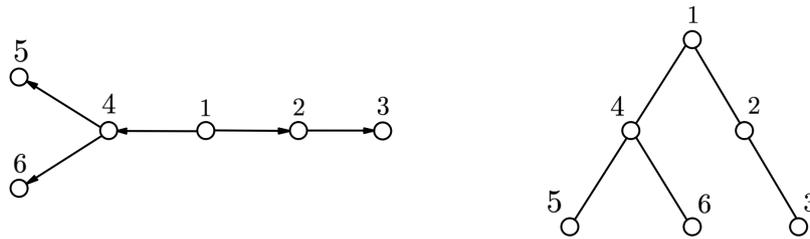


Abbildung 1: Zwei unterschiedliche Darstellungen für den Binärbaum  $B = (V, E)$  mit  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  und  $E = \{(1, 2), (2, 3), (1, 4), (4, 5), (4, 6)\}$ .

**Bemerkung 3.1.** In der Darstellung auf einer 2-dimensionalen Fläche entspringt aus jedem Knoten ein linkes und ein rechtes Kind. In der Abbildung 1 ist das rechte Kind vom Knoten 2 beschrieben durch  $B' = (V', E')$  mit  $V' = \{3\}$  und  $E' = \emptyset$ . Das linke Kind des Knotens 2 ist der leere Binärbaum. In so einem Binärbaum hat jeder Knoten genau zwei Kinder, die wieder Binärbäume sind.

Mit der Definition 3.9 wird ein Binärbaum lediglich durch seine Knotenmenge  $V$  und seine Kantenmenge  $E$  beschrieben. Wir möchten Darstellungen von Binärbäumen auf einer 2-dimensionalen Fläche unterscheiden, die einen Unterschied in der Reihenfolge der Kinder eines beliebigen Knotens aufweisen. Für eine genaue Definition dieser Graphen, die wir als planare Binärbäume bezeichnen, orientieren wir uns an [[6], S. 134-135] mit dem Unterschied, dass wir dies auf Binärbäume anwenden.

**Definition 3.11.** Sei  $B = (V, E)$  ein leerer Binärbaum (also  $V = \emptyset$ ), dann ist die **Ordnung von  $B$**  (kurz:  $o(B)$ ) durch

$$o(B) = o(\emptyset) \quad \text{für } V = \emptyset$$

definiert. Sei  $B = (V, E)$  ein Binärbaum mit Wurzel  $w \in V$  und ihren Kindern  $B_1$  und  $B_2$ . Dann gilt rekursiv:

$$o(B) = (w) \quad \text{für } V = \{w\}$$

und

$$o(B) = (w, o(B_1), o(B_2)) \quad \text{für } |V| \geq 2,$$

wobei  $B_1$  das linke und  $B_2$  das rechte Kind von  $w$  ist.

Prüfen wir nochmal die Abbildung 1. Laut der Definition 3.11 weist der dargestellte Binärbaum  $B$  die Ordnung

$$o(B) = (1, (4, (5), (6)), (2, o(\emptyset), (3)))$$

auf.

**Definition 3.12.** Ein *planarer Binärbaum* ist ein Paar  $(B, o(B))$ , wobei  $B = (V, E)$  ein Binärbaum ist und  $o(B)$  seine konkrete Ordnung beschreibt.

Planare Binärbäume sind letztendlich Darstellungen von regulären Binärbäumen auf einer 2-dimensionalen Fläche auf die Art und Weise, wie wir das in Abbildung 1 (rechte Version) gemacht haben. Damit sind die Binärbäume, die wir zählen wollen, nicht nur durch ihre Knoten- und Kantenmengen beschrieben, sondern auch durch ihr Aussehen (ihre Ordnungen). Zwei planare Binärbäume sind identisch/isomorph, wenn ihre Knotenmengen, Kantenmengen und ihre Ordnungen übereinstimmen. Kombinatorisch bedeutet das, dass wir viel mehr Möglichkeiten haben, die wir zählen werden. Um das mit einem einfachen Beispiel zu stützen: In der Abbildung 2 sind vier Darstellungen von Binärbäumen zu erkennen. Laut unserer Definition 3.9 sind das vier Darstellungen für den selben markierten Binärbaum. Diese vier Darstellungen weisen paarweise unterschiedliche Ordnungen auf, weshalb wir tatsächlich vier unterschiedliche, planare Binärbäume mit genau sechs markierten Knoten sehen.

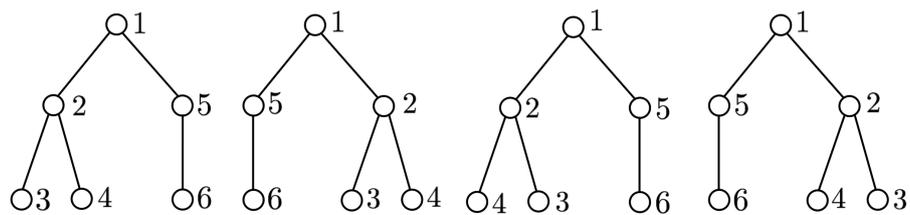


Abbildung 2: Vier planare Binärbäume mit genau sechs markierten Knoten.

### 3.2 Die exponentielle Erzeugendenfunktion markierter, planarer Binärbäume

In diesem Kapitel werden planare Binärbäume mit markierten Knoten als Strukturen auf einer endlichen Menge betrachtet. Beim Aufstellen der zugehörigen exponentiellen Erzeugendenfunktion, übernimmt die Multiplikation und die daraus resultierenden  $\alpha \otimes \beta$ -Strukturen (aus der Definition (2.8)) eine wichtige Rolle.

In der Abbildung 3 werden alle planaren Binärbäume mit genau 0, 1, 2 und 3 Knoten dargestellt. Dabei wird der oberste Knoten eines Binärbaumes als Wurzel definiert.

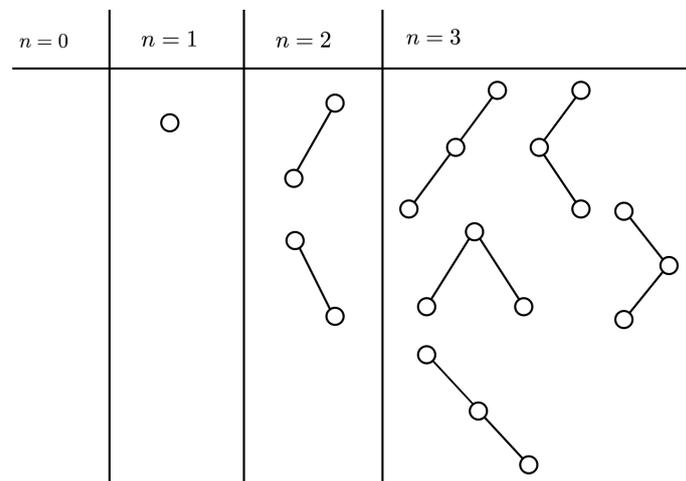


Abbildung 3: Alle planaren Binärbäume mit genau  $n \in \{0, 1, 2, 3\}$  Knoten.

**Definition 3.13.** Die Anzahl der möglichen planaren Binärbäume mit genau  $n$  Knoten wird als die  $n$ -te **Catalan-Zahl**  $C_n$  bezeichnet. Aus der Abbildung 3 werden  $1, 1, 2, 5, \dots$  als die ersten Folgenglieder von  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  erfasst.

Für mehr Informationen über die Catalan-Zahlen und Binärbäume siehe z.B. [8].

**Bemerkung 3.2.** Werden planare Binärbäume mit markierten Knoten als Strukturen auf einer endlichen Menge betrachtet, dann ist  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  die dazugehörige Folge mit  $c_n = n! \cdot C_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $E_c(x) = \sum_{n \geq 0} c_n \frac{x^n}{n!}$  die exponentielle Erzeugendenfunktion dieser Strukturen.

Unter der Benutzung exponentieller Erzeugendenfunktionen suchen wir folgend eine konkrete, geschlossene Formel für das  $n$ -te Folgenglied  $c_n$ .

Das Folgenglied  $c_n$  bietet uns die Anzahl planarer Binärbäume mit genau  $n$  markierten Knoten. Es gibt genau einen Binärbaum mit 0 Knoten. Also gilt  $c_0 = 1$  und damit auch

$$E_c(x) = \sum_{n \geq 0} c_n \frac{x^n}{n!} = 1 + \sum_{n \geq 1} c_n \frac{x^n}{n!}.$$

Die Erzeugendenfunktion der nicht-leeren, planaren Binärbäume mit markierten Knoten ist somit durch die Reihe  $\sum_{n \geq 1} c_n \frac{x^n}{n!}$  beschrieben. Besitzt ein planarer Binärbaum  $B = (V, E)$  einen Knoten, so können wir ihn in die Wurzel  $w \in V$  und seine Kinder  $B_1 = (A_1, E_1)$  sowie  $B_2 = (A_2, E_2)$  unterteilen. Die Kinder  $B_1$  und  $B_2$  sind wieder planare Binärbäume. Mit  $A = V \setminus \{w\}$  erhalten wir eine Knotenmenge, die sich auf die beiden Knotenmengen der Kinder  $B_1$  und  $B_2$  aufteilt. Damit erklären wir die geordnete Partition  $A = A_1 \cup A_2$ , wobei auf  $A_1$  und  $A_2$  unabhängig voneinander markierte, planare Binärbäume als Strukturen betrachtet werden. Das sollte uns (nicht nur aufgrund der passenden Wahl unserer Mengenbezeichnungen) bekannt vorkommen. Der eben beschriebene Zusammenhang bildet ein Beispiel für die Definition 2.8, wobei es sich sowohl bei den  $\alpha$ -Strukturen als auch bei den  $\beta$ -Strukturen aus der Definition um planare Binärbäume mit markierten Knoten handelt. Der Satz 2.3 liefert uns die exponentielle Erzeugendenfunktion dieser  $\alpha \otimes \beta$ -Strukturen mit  $E_c(x)^2$ . Betrachten wir nun die geordnete Partition  $V = \{w\} \cup A_1 \cup A_2$ , erhalten wir durch dasselbe Multiplikationsprinzip aus dem Satz 2.3 die exponentielle Erzeugendenfunktion der  $\gamma \otimes \alpha \otimes \beta$ -Strukturen, wobei die  $\gamma$ -Strukturen die trivialen Strukturen der 1-elementigen Menge (aus der Bemerkung 2.3) mit zugehöriger Folge  $(0, 1, 0, 0, \dots)$  sind. Damit erhalten wir

$$xE_c(x)^2$$

als Erzeugendenfunktion der nicht-leeren, planaren Binärbäume mit markierten Knoten. Deswegen gilt

$$E_c(x) = 1 + xE_c(x)^2. \quad (10)$$

Die Lösungen der Gleichung 10 sind

$$E_c(x)_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x}}{2x}.$$

Hier müssen wir vorsichtig sein, denn die Umformung dieser quadratischen Gleichung bietet uns zwei Lösungen. Es ist bekannt, dass  $E_c(0) = c_0 = 1$  gilt. Nun muss sich nur noch vergewissert werden, dass  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sqrt{1 - 4x}}{2x}$  nicht existiert und  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x} = 1$  ergibt. Wir interessieren uns also lediglich für die Lösung  $E_c(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$ .

Eine große Hilfe für die folgende Umformung ist die Binomialreihe

$$(1 + x)^\alpha = \sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} x^n \quad (11)$$

mit  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Diese ist zum Beispiel in [[4], S. 24] aufzufinden.

Die folgende Umformung ist eine von vielen zielführenden Varianten, die sich im Kern gleichen. Zwei andere Beispiele sind in [[1], S. 101-102] und [[6], S. 141-142] aufzufinden. Betrachtet wir nun

$$\sum_{n \geq 0} c_n \frac{x^{n+1}}{n!} = x \cdot E_c(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1 - 4x)^{\frac{1}{2}}.$$

Nach Anwendung der Binomialreihe (11) gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1 - 4x)^{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-4)^n x^n \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-4)^n x^n \\
&= \sum_{n \geq 0} n! \left(-\frac{1}{2}\right) \binom{\frac{1}{2}}{n+1} (-4)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n!} \\
&= \sum_{n \geq 0} n! \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2) \cdots (\frac{1}{2}-n)}{(n+1)!} (-4)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n!} \\
&= \sum_{n \geq 0} n! (-4)^n \frac{(\frac{1-2}{2})(\frac{1-4}{2}) \cdots (\frac{1-2n}{2})}{(n+1)!} \frac{x^{n+1}}{n!} \\
&= \sum_{n \geq 0} n! (-4)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{(-2)^n (n+1)!} \frac{x^{n+1}}{n!} \\
&= \sum_{n \geq 0} n! 2^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{(n+1)!} \frac{x^{n+1}}{n!} \\
&= \sum_{n \geq 0} n! \frac{1}{n+1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n!} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} \frac{x^{n+1}}{n!} \\
&= \sum_{n \geq 0} n! \frac{1}{n+1} \frac{(2n)!}{2n!} \frac{x^{n+1}}{n!} \\
&= \sum_{n \geq 0} n! \frac{1}{n+1} \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} \frac{x^{n+1}}{n!} \\
&= \sum_{n \geq 0} n! \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \frac{x^{n+1}}{n!}.
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\sum_{n \geq 0} c_n \frac{x^{n+1}}{n!} = \sum_{n \geq 0} \frac{n!}{n+1} \binom{2n}{n} \frac{x^{n+1}}{n!}.$$

Der Koeffizientenvergleich liefert uns die explizite Formel

$$c_n = \frac{n!}{n+1} \binom{2n}{n}$$

für die Anzahl planarer Binärbäume mit genau  $n$  markierten Knoten.

Zurück zu unserer Definition 3.13. Für die  $n$ -te Catalan-Zahl erhalten wir die Gleichheit

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n},$$

die somit auch die Anzahl an planaren Binärbäumen mit genau  $n$  (unmarkierten) Knoten beschreibt. Für planare Binärbäume mit genau  $n$  markierten Knoten gibt es genau  $\frac{n!}{n+1} \binom{2n}{n}$  Möglichkeiten. In der Abbildung 2 sind vier unterschiedliche planare Binärbäume mit genau sechs markierten Knoten dargestellt. Diese vier Bäume wurden daher aus insgesamt  $c_6 = \frac{6!}{6+1} \binom{2 \cdot 6}{6} = 95040$  Möglichkeiten ausgewählt.

## 4 Die exponentielle Erzeugendenfunktion markierter, gewurzelter Bäume

Anders als Binärbäume können Knoten eines gewurzelten Baumes mehr als zwei Kindknoten aufweisen. Unser Ziel in diesem Kapitel ist es, gewurzelte Bäume mit markierten Knoten unter Benutzung exponentieller Erzeugendenfunktionen zu zählen. Vorerst werden wir gewurzelte Bäume und gewurzelte Wälder definieren. Anschließend werden wir die exponentielle Erzeugendenfunktion der gewurzelten Bäume mit markierten Knoten aufstellen und mithilfe der Lagrangschen Inversionsformel die konkrete Anzahl dieser Graphen für genau  $n$  Knoten folgern.

**Definition 4.1.** Ein **Wald**  $G = (V, E)$  ist ein *zyklischer freier Graph*.

**Definition 4.2.** Ein Baum  $T = (V, E)$  heißt **gewurzelter Baum**, wenn  $T$  gerichtet ist und es genau einen Knoten  $w \in V$  gibt für den kein Paar  $(v, w) \in E$  existiert.

**Definition 4.3.** Ein Wald  $F = (V, E)$  heißt **gewurzelter Wald**, wenn seine zusammenhängenden Komponenten gewurzelte Bäume sind.

Für die Darstellung auf einer 2-dimensionalen Fläche dieser Graphen übernehmen wir die der Binärbäume. Gerichtete Kanten verlaufen nach unten und die Wurzel (falls vorhanden) ist immer der obere Knoten. Interessant ist, dass die Kinder

eines beliebigen Knotens gewurzelte Bäume sind. Lassen wir also die Wurzel eines gewurzelten Baumes weg, so bleiben nur noch ihre Kinder als zusammenhängende Komponenten übrig und es entsteht ein gewurzelter Wald. Dieser Zusammenhang wird in der Abbildung 4 dargestellt: Der gewurzelte Wald  $G_2$  wird durch das Entfernen der Wurzel vom gewurzelten Baum  $G_1$  generiert.

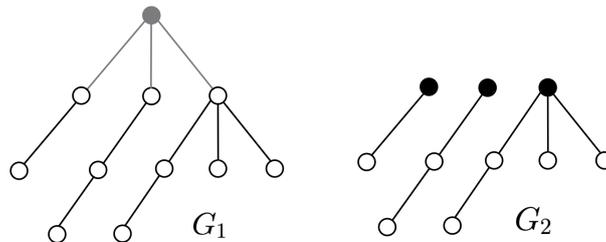


Abbildung 4:  $G_1 = (V_1, E_1)$  mit  $|V_1| = 11$ ;  $G_2 = (V_2, E_2)$  mit  $|V_2| = 10$ .

Mit dem Wissen über gewurzelte Bäume, das wir uns bis hierhin erarbeitet haben, können wir die exponentielle Erzeugendenfunktion dieser Graphen mit markierten Knoten aufstellen. Das ist auch unser erstes Ziel. Die Strukturen, die in diesem Kapitel im Fokus stehen, sind die der markierten, gewurzelten Bäume. Diese nennen wir kurz  $\beta$ -Strukturen. Wir definieren die Folge  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  so, dass das  $n$ -te Folgenglied gleich der Anzahl an  $\beta$ -Strukturen auf einer  $n$ -elementigen Menge ist. Dann ist

$$E_t(x) = \sum_{n \geq 0} t_n \frac{x^n}{n!}$$

die exponentielle Erzeugendenfunktion der  $\beta$ -Strukturen. Damit wir eine hilfreiche Gleichung für  $E_t(x)$  folgern können, müssen wir uns der Definition 2.9 der Kompositionsstrukturen und der Aussage des Satzes 2.4 bedienen. Damit das gewährleistet werden kann, setzen wir  $t_0 = 0$ .

Nehmen wir uns einen beliebigen gewurzelten Baum mit markierten Knoten  $T = (V, E)$  (die Knotenmenge ist nicht leer, denn  $t_0$  ist uns schon bekannt), so können wir ihn in seine Wurzel  $w \in V$  und ihre Kinder  $T_1, T_2, \dots, T_k$  (mit  $k \in \mathbb{N}$  und  $T_i = (A_i, E_i)$  für alle  $i \in [k]$ ) unterteilen. Wie in der Abbildung 4 dargestellt, erhalten wir durch das Entfernen der Wurzel  $w$  einen gewurzelten Wald mit

markierten Knoten. Seine zusammenhängenden Komponenten sind nicht nur gewurzelte Bäume, sondern explizit durch die Kinder  $T_1, T_2, \dots, T_k$  gegeben. Auf jeder Knotenmenge  $A_i$  werden also  $\beta$ -Strukturen betrachtet. Sei  $A = V \setminus \{w\}$  die Menge aller Knoten ohne die Wurzel. Dann erhalten wir die Partition  $A = \bigcup_{i=1}^k A_i$ . Dieser Zusammenhang sollte uns bekannt vorkommen. Das eben Beschriebene bildet ein konkretes Beispiel für die Definition 2.9 mit markierten, gewurzelten Bäumen als  $\beta$ -Strukturen auf jeder Knotenmenge  $A_i$  und den trivialen Strukturen der endlichen Menge (siehe Definition 2.7) als  $\alpha$ -Strukturen auf der Menge  $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ . Der Satz 2.4 liefert uns damit

$$e^{E_t(x)}$$

als exponentielle Erzeugendenfunktion der  $\alpha \circ \beta$ -Strukturen. Betrachten wir die Partition  $V = \{w\} \cup A$ , wobei auf der Knotenmenge  $A$  die  $\alpha \circ \beta$ -Strukturen gezählt werden. Seien  $\gamma$ -Strukturen die trivialen Strukturen der 1-elementigen Menge mit zugehöriger Folge  $(0, 1, 0, 0, \dots)$  auf  $\{w\}$ . Sehr erstaunlich ist nun, dass wir laut der Definition 2.8, die  $\beta$ -Strukturen als  $\gamma \otimes (\alpha \circ \beta)$ -Strukturen bezeichnen können. Der Satz 2.3 liefert uns somit

$$E_t(x) = xe^{E_t(x)} \tag{12}$$

als exponentielle Erzeugendenfunktion der  $\beta$ -Strukturen.

Eine direkte Vorgehensweise wäre es, die Gleichung (12) äquivalent nach  $E_t(x)$  umzuformen. Leider ist das nicht so einfach, wie in den Beispielen zuvor. Zu unserem Glück erfüllt  $E_t(x) = xe^{E_t(x)}$  bestimmte Bedingungen, die es uns ermöglichen, die Lagrangesche Inversionsformel anzuwenden und die konkreten Koeffizienten, ohne großen Aufwand zu bestimmen.

**Satz 4.1. Lagrangesche Inversionsformel**

Seien  $f(x)$  und  $\phi(x)$  formale Potenzreihen mit  $\phi(0) = 1$ . Dann gibt es eine eindeutige formale Potenzreihe  $u(x)$  mit  $u(x) = x\phi(u(x))$  und

$$[x^n]\{f(u(x))\} = \frac{1}{n}[u(x)^{n-1}]\{f'(u(x))\phi(u(x))^n\}. \tag{13}$$

Ein möglicher Beweis für diesen Satz findet sich in [[9], S. 181].

Bevor wir die Inversionsformel anwenden, betrachte

$$[x^{n-1}]\{e^{ax}\} = [x^{n-1}]\left\{\sum_{n \geq 0} \frac{a^n}{n!} x^n\right\} = \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \quad (14)$$

für  $a \in \mathbb{R}$ . Im nächsten Schritt werden wir die Lagrangesche Inversionsformel 13 benutzen, um den Koeffizienten  $[x^n]\{E_t(x)\}$  zu bestimmen. Wählen wir  $\phi(x) = e^x$  und  $f(x) = x$ , so gibt es laut dem Satz 4.1 eine eindeutige Funktion  $u(x)$  mit  $u(x) = xe^{u(x)}$ . Vorteilhaft ist, dass wir  $u(x)$  nicht mehr bestimmen müssen, da wir diese Funktion mit (12) bereits kennen. Damit gilt  $u(x) = E_t(x)$  und

$$\begin{aligned} [x^n]\{E_t(x)\} &= [x^n]\{f(E_t(x))\} \stackrel{(13)}{=} \frac{1}{n} [E_t(x)^{n-1}]\{f'(E_t(x))(e^{E_t(x)})^n\} \\ &= \frac{1}{n} [E_t(x)^{n-1}]\{e^{nE_t(x)}\} \\ &\stackrel{14}{=} \frac{1}{n} \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \frac{n^{n-1}}{n!}. \end{aligned}$$

Aus  $[x^n]\{E_t(x)\} = \frac{t_n}{n!}$  folgt

$$t_n = n^{n-1}.$$

Dadurch haben wir mit  $n^{n-1}$  (für  $n \geq 1$ ) die genaue Anzahl an gewurzelten Bäumen mit genau  $n$  markierten Knoten gefunden.

**Satz 4.2.** *Es gibt genau  $n^{n-2}$  (ungewurzelte) Bäume mit genau  $n$  markierten Knoten für  $n \geq 1$ .*

Dieser Satz wird auch als Cayley's Formel für die Anzahl an Bäumen bezeichnet. In [[2], S. 221-226] sind vier unterschiedliche Beweise für diesen Satz aufzufinden.

Es ist kein Zufall, dass sich die Anzahl der gewurzelten Bäume und die Anzahl an (allgemeinen) Bäumen mit genau  $n$  markierten Knoten nur um den Faktor  $n$

unterscheiden. Nehmen wir uns einen beliebigen Baum mit genau  $n$  markierten Knoten, so haben wir genau  $n$  Möglichkeiten, eine Wurzel zu wählen. Für jeden ungewurzelten Baum  $B$  gibt es  $n$  mal so viele gewurzelte Bäume, die  $B$  als unterliegenden Baum aufweisen. In Abbildung 5 ist der beschriebene Zusammenhang am Beispiel  $n = 3$  dargestellt.

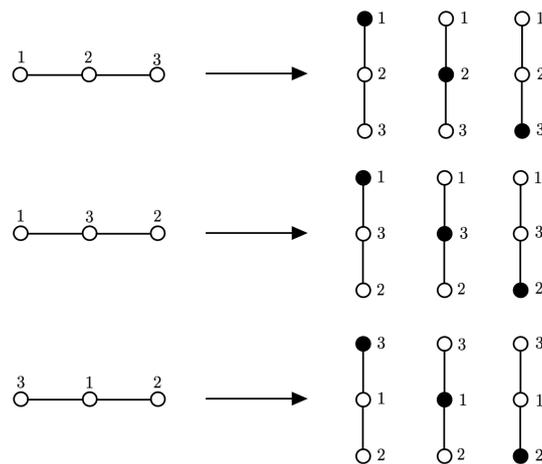


Abbildung 5: Links: Alle Bäume mit genau drei markierten Knoten; Rechts: Alle gewurzelten Bäume mit genau drei markierten Knoten.

Bis zu diesem Punkt haben uns exponentielle Erzeugendenfunktionen dabei geholfen, planare Binärbäume und gewurzelte Bäume mit markierten Knoten zu zählen. Im nächsten Kapitel wollen wir uns von den Bäumen entfernen und andere interessante Graphen in diesem Zusammenhang betrachten.

## 5 Die exponentielle Erzeugendenfunktion markierter, 2-regulärer Graphen

In diesem Kapitel werden 2-reguläre Graphen studiert. Vorerst werden die  $k$ -regulären Graphen definiert, um daraufhin mit dem Spezialfall  $k = 2$  zu arbeiten. Anschließend werden wir die exponentielle Erzeugendenfunktion der 2-regulären Graphen aufstellen und uns, unter Betrachtung ihres asymptotischen Verhaltens, der Anzahl 2-regulärer Graphen mit genau  $n$  markierten Knoten annähern. Da

auch in diesem Fall die Knotenmenge eines solchen Graphen in die Knotenmengen seiner zusammenhängenden Komponenten klassifiziert werden kann, ist es naheliegend, dass die Kompositionsstrukturen aus der Definition 2.9 behilflich beim Aufstellen der Erzeugendenfunktion sein werden.

**Definition 5.1.** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph. Der **Knotengrad**  $d_v$  eines Knotens  $v \in V$  ist definiert durch  $d_v = |\{\{a, b\} \in E \mid a = v \text{ oder } b = v\}|$ .

Einfacher ausgedrückt ist der Knotengrad  $d_v$  die Anzahl an Kanten, die den Knoten  $v$  enthalten.

**Definition 5.2.** Ein Graph  $G = (V, E)$  heißt  **$k$ -regulär** für ein  $k \in \mathbb{N}_0$ , wenn für alle  $v \in V$  der Knotengrad gleich  $k$  ist.

Die Graphen aus der Definition 5.2 bilden mit  $k = 2$  die 2-regulären Graphen, um die es in diesem Kapitel geht. In der Abbildung 6 sind alle 2-regulären Graphen mit genau 3, 4, 5, 6 und 7 Knoten dargestellt.

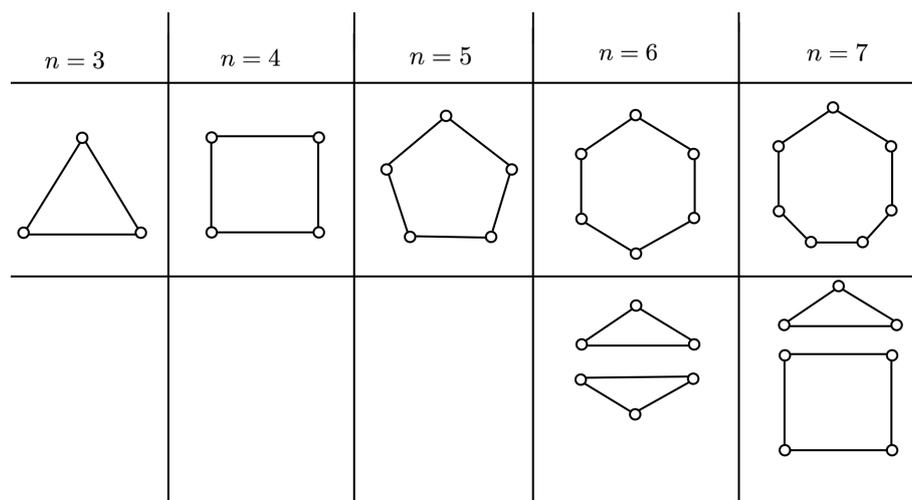


Abbildung 6: Alle 2-regulären Graphen mit genau  $n \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$  Knoten.

Durch Integration beider Seiten von  $\sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$  erhalten wir die Gleichheit

$$\begin{aligned}
& \int \sum_{n \geq 0} x^n dx = \int \frac{1}{1-x} dx \\
& \Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = -\log(1-x) \\
& \Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n} = \log\left(\frac{1}{1-x}\right).
\end{aligned} \tag{15}$$

Die resultierende Gleichung werden wir in der Umformung (17) benutzen.

Die exponentielle Erzeugendenfunktion der 2-regulären Graphen nennen wir  $E_f(x) = \sum_{n \geq 0} f_n \frac{x^n}{n!}$ , wobei  $f_n$  gleich der Anzahl an 2-regulären Graphen mit genau  $n$  markierten Knoten ist. Sei  $G = (A, E)$  ein beliebiger 2-regulärer Graph mit markierten Knoten. Der Graph  $G$  muss nicht zwangsweise zusammenhängend sein (siehe Abbildung 6). Wir können  $G$  jedoch in seine zusammenhängenden Komponenten aufteilen, die lediglich Anordnungen ihrer Knoten in einem Kreis sind. Betrachten wir die Partition  $A = \bigcup_{i=1}^k A_i$ , wobei jeder Block  $A_i$  die Knotenmenge einer zusammenhängenden Komponente von  $G$  beschreibt. Seien die Anordnungsmöglichkeiten der Elemente einer endlichen Menge in einem Kreis  $\beta$ -Strukturen. Die zugehörige exponentielle Erzeugendenfunktion nennen wir  $E_b(x) = \sum_{n \geq 0} b_n \frac{x^n}{n!}$ , wobei  $b_n$  gleich der Anzahl an  $\beta$ -Strukturen ist. Die  $\beta$ -Strukturen betrachten wir daher unabhängig voneinander auf jeder Knotenmenge  $A_i$ . Wählen wir nun die trivialen Strukturen einer endlichen Menge (siehe Definition 2.7) als  $\alpha$ -Strukturen auf der Menge  $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ , greift die Definition 2.9 der Kompositionsstrukturen. Laut dem Satz 2.4 ist die exponentielle Erzeugendenfunktion der  $\alpha \circ \beta$ -Strukturen gegeben durch

$$E_f(x) = e^{E_b(x)}. \tag{16}$$

Um eine konkretere Funktion für (16) zu erhalten, müssen wir klären, wie viele unterschiedliche Möglichkeiten es gibt, genau  $n$  markierte Knoten in einem Kreis anzuordnen. Die Anzahl der Möglichkeiten entspricht genau  $b_n$ . Erstmal vergewissern wir uns, dass  $n \geq 3$  gelten muss, da wir sonst keinen 2-regulären Graphen mehr haben. Für genau  $n$  verfügbare Plätze in einem Kreis gibt es genau  $\frac{1}{2} \cdot \frac{n!}{n} = \frac{(n-1)!}{2}$

Möglichkeiten,  $n$  markierte Knoten anzuordnen. Wir teilen die Anzahl der Möglichkeiten der Besetzung dieser  $n$  Plätze ( $n!$ ) durch  $n$ , da alle  $n$  Verschiebungen im Uhrzeigersinn nichts an der Knoten- und Kantenmenge und damit auch am Graphen ändern. Die 2 im Nenner kommt daher, dass die Spiegelung an einer Symmetrieachse ebenfalls nichts an der Knoten- und Kantenmenge verändert. Damit erhalten wir  $b_n = \frac{(n-1)!}{2}$ . Vereinbaren wir das mit der Gleichung (16), erlangen wir

$$\begin{aligned}
E_f(x) &= \exp \left\{ \sum_{n \geq 3} \frac{(n-1)!}{2} \frac{x^n}{n!} \right\} \\
&= \exp \left\{ \frac{1}{2} \left( \sum_{n \geq 3} \frac{x^n}{n} \right) \right\} \\
&= \exp \left\{ \frac{1}{2} \left( \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n} - x - \frac{x^2}{2} \right) \right\} \\
&\stackrel{15}{=} \exp \left\{ \frac{1}{2} \left( \log \frac{1}{1-x} - x - \frac{x^2}{2} \right) \right\} \\
&= \sqrt{\exp \left\{ \log \frac{1}{1-x} \right\}} \cdot \exp \left\{ -\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} \right\} \\
&= \frac{e^{-\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4}}}{\sqrt{1-x}}.
\end{aligned} \tag{17}$$

Zunächst fällt auf, dass unsere Erzeugendenfunktion mit  $E_f(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4}}}{\sqrt{1-x}}$  deutlich komplexer ist als ihre Vorgänger in den Kapiteln 3 und 4. Das bemerken wir besonders dann, wenn wir versuchen, durch Termumformung von  $\frac{e^{-\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4}}}{\sqrt{1-x}}$  auf den Koeffizienten  $f_n$  zu schließen. Daher bedienen wir uns in den nächsten Schritten Methoden aus der Analysis und betrachten das asymptotische Verhalten der Funktion. Damit das möglich ist, trennen wir uns von der Unbekannten  $x$  und ersetzen diese durch die komplexe Variable  $z$ . Die ersten Summanden der Taylorreihe von  $E_f(z)$  an der Entwicklungsstelle  $z_0 = 0$  erhalten wir mit WolframAlpha:

$$E_f(z) = 1 + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{8} + \frac{z^5}{10} + \frac{7z^6}{72} + \frac{31z^7}{336} + \frac{167z^8}{1920} + \frac{67z^9}{810} + \frac{7969z^{10}}{100800} + \dots$$

Erweitern wir den Bruch jedes Summanden, sodass die passenden Fakultäten im

Nenner stehen, erhalten wir

$$E_f(z) = 1 \cdot \frac{z^0}{0!} + 0 \cdot \frac{z^1}{1!} + 0 \cdot \frac{z^2}{2!} + 1 \cdot \frac{z^3}{3!} + 3 \cdot \frac{z^4}{4!} + 12 \cdot \frac{z^5}{5!} + 70 \cdot \frac{z^6}{6!} + 465 \cdot \frac{z^7}{7!} \\ + 3507 \cdot \frac{z^8}{8!} + 30016 \cdot \frac{z^9}{9!} + 286884 \cdot \frac{z^{10}}{10!} + \dots$$

Damit sind die ersten Koeffizienten  $\{\frac{z^n}{n!}\}[E_f(z)]$  durch die Folge (1, 0, 0, 1, 3, 12, 70, 465, 3507, 30016, 286884, ...) beschrieben. In den nächsten Schritten orientieren wir uns an [[9], S. 192-195]. In dieser Referenz wird eine Approximation der gesuchten Koeffizienten  $f_n$  erläutert und bewiesen. Diese beruht auf der Tatsache, dass die Funktion  $v(z) = e^{-\frac{z}{2} - \frac{z^2}{4}}$  analytisch in einer Umgebung  $|z| < 1 + \delta$  (mit  $\delta > 0$ ) um den Koordinatenursprung ist und eine Reihenentwicklung  $v(z) = \sum_{j \geq 0} v_j(1-z)^j$  in einer Umgebung  $|z-1| < \epsilon$  (mit  $\epsilon > 0$ ) aufweist. Der anschließende Satz 5.1 soll in dieser Arbeit nicht bewiesen, sondern nur benutzt werden.

**Satz 5.1.** *Sei  $f(z) = (1-z)^\beta v(z)$  und  $v(z)$  analytisch in einer Umgebung  $|z| < 1 + \delta$  (für  $\delta > 0$ ). Angenommen,  $v(z)$  hat in einer Umgebung um  $z = 1$  die Reihenentwicklung*

$$v(z) = \sum_{j \geq 0} v_j(1-z)^j$$

und  $\beta \notin \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} [z^n]\{f(z)\} &= [z^n]\{(1-z)^\beta v(z)\} \\ &= [z^n]\left\{\sum_{j=0}^m v_j(1-z)^{\beta+j}\right\} + \mathcal{O}(n^{-m-\beta-2}) \\ &= \sum_{j=0}^m v_j \binom{n-\beta-j-1}{n} + \mathcal{O}(n^{-m-\beta-2}). \end{aligned} \tag{18}$$

Ein Beweis für diesen hilfreichen Satz ist in [[9], S. 194-195] aufzufinden.

Lassen wir die Reihenentwicklung der Funktion  $v(z) = e^{-\frac{z}{2} - \frac{z^2}{4}}$  an der Entwicklungsstelle  $z_0 = 1$  mit WolframAlpha berechnen, erhalten wir für die ersten Summanden

$$v(z) = e^{-\frac{3}{4}} + e^{-\frac{3}{4}}(1-z) + \frac{1}{4}e^{-\frac{3}{4}}(1-z)^2 - \frac{1}{12}e^{-\frac{3}{4}}(1-z)^3 - \frac{5}{96}e^{-\frac{3}{4}}(1-z)^4 + \dots \tag{19}$$

Wir möchten den Satz 5.1 für  $v(z) = e^{-\frac{z}{2} - \frac{z^2}{4}}$ ,  $m = 4$  und  $\beta = -\frac{1}{2}$  anwenden, da wir mit dieser Wahl eine Näherung an  $f(z) = E_f(z)$  erhalten. Die Koeffizienten  $[(1-z)^j]\{v(z)\}$  aus (19) übernehmen wir als  $v_j$ . Dadurch erhalten wir

$$\begin{aligned} [z^n]\{E_f(z)\} &= \sum_{j=0}^4 v_j \binom{n - (-\frac{1}{2}) - j - 1}{n} + \mathcal{O}\left(n^{-\frac{11}{2}}\right) \\ &\stackrel{5.1}{=} \frac{1}{e^{\frac{3}{4}}} \binom{n - \frac{1}{2}}{n} + \frac{1}{e^{\frac{3}{4}}} \binom{n - \frac{3}{2}}{n} + \frac{1}{4e^{\frac{3}{4}}} \binom{n - \frac{5}{2}}{n} - \frac{1}{12e^{\frac{3}{4}}} \binom{n - \frac{7}{2}}{n} \\ &\quad - \frac{5}{96e^{\frac{3}{4}}} \binom{n - \frac{9}{2}}{n} + \mathcal{O}\left(n^{-\frac{11}{2}}\right). \end{aligned}$$

Es ist außerdem bekannt, dass  $E_f(z)$  eine exponentielle Erzeugendenfunktion ist, weswegen

$$[z^n]\{E_f(z)\} = \frac{f_n}{n!}$$

gilt. Daraus entspringt die Gleichheit

$$f_n = \frac{n!}{e^{\frac{3}{4}}} \left( \binom{n - \frac{1}{2}}{n} + \binom{n - \frac{3}{2}}{n} + \frac{1}{4} \binom{n - \frac{5}{2}}{n} - \frac{1}{12} \binom{n - \frac{7}{2}}{n} - \frac{5}{96} \binom{n - \frac{9}{2}}{n} + \dots \right) \quad (20)$$

In der folgenden Tabelle werden die exakten Werte von  $f_n$  mit den durch (20) approximierten Werten  $\tilde{f}_n$  verglichen.

$n$	$f_n$	$\tilde{f}_n$	$\frac{f_n - \tilde{f}_n}{f_n}$
3	1	$\approx 1,14955$	$\approx 0,14955$
4	3	$\approx 2,59894$	$\approx 0,13369$
5	12	$\approx 12,5403$	0,045025
6	70	$\approx 70,3464$	$\approx 0,00495$
7	465	$\approx 463,133$	$\approx 0,00402$
8	3507	$\approx 3506,39$	$\approx 0,000174$
9	30016	$\approx 30022,6$	$\approx 0,00022$
10	286884	$\approx 286880,566$	$\approx 0,000019$

Die exponentielle Erzeugendenfunktion der 2-regulären Graphen mit markierten Knoten wurde mithilfe der Kompositionsstrukturen aus 2.9 auf möglichst einfache

Weise aufgestellt. Es ist faszinierend zu beobachten, wie nahe wir damit den Werten von  $f_n$  kommen.

In dieser Arbeit wurden exponentielle Erzeugendenfunktionen aufgestellt, um markierte Strukturen aus der Graphentheorie zu zählen. Die Idee der Erzeugendenfunktion bietet jedoch nicht nur bei kombinatorischen Problemen der Graphentheorie Vorteile. Viele dieser formalen Potenzreihen entspringen aus rekursiv definierten Folgen für die man eine geschlossene Formel des  $n$ -ten Folgeliedes sucht. Ein berühmtes Beispiel dafür bildet die Fibonacci-Folge. Erzeugendenfunktionen sind ebenfalls behilflich, konkrete Identitäten wie  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$  nachzuweisen. Ihre Anwendungsbereiche sind vielseitig.

In den Kapiteln 3 und 4 haben wir mit den jeweiligen exponentiellen Erzeugendenfunktionen auf die Anzahl planarer Binärbäume und gewurzelter Bäume mit genau  $n$  markierten Knoten geschlossen. Die Anzahl der markierten, gewurzelten Bäume gab uns anschließend Aufschluss über die Anzahl ungerichteter Bäume mit markierten Knoten. Im Kapitel 5 haben wir eine weitere Anwendung exponentieller Erzeugendenfunktionen gesehen. Ist die Funktion etwas komplexer und lässt nicht auf einen einfachen Koeffizienten schließen, kann es durchaus sinnvoll sein, das asymptotische Verhalten der Funktion zu studieren, um eine Annäherung an die geschlossene Formel des gesuchten Koeffizienten bzw. der gesuchten Anzahl zu generieren.

## Literatur

- [1] Martin Aigner. *A Course in Enumeration*. Springer, Berlin; New York, 2007.  
doi:10.1007/978-3-540-39035-0.
- [2] Martin Aigner and Günter M. Ziegler. *Proofs from THE BOOK*. Springer, Berlin, Heidelberg, 5. edition, 2014.
- [3] Thomas S. Brewer. Algebraic properties of formal power series composition. Master's thesis, University of Kentucky, 2014.
- [4] Peter J. Cameron. *Notes on Counting: An Introduction to Enumerative Combinatorics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2017.
- [5] Reinhard Diestel. *Graphentheorie*. Springer-Verlag, Heidelberg, 2017.
- [6] Ömer Nuri Eğecioglu. *Lessons in Enumerative Combinatorics*. Springer Nature, Singapore, 2021.
- [7] Mark Haiman. Notes on exponential generating functions and structures. URL: <https://math.berkeley.edu/~mhaiman/math172-spring10/exponential.pdf>.
- [8] Richard P. Stanley. *Catalan Numbers*. Cambridge University Press, Cambridge, 2015.
- [9] Herbert S. Wilf. *Generatingfunctionology Third Edition*. Elsevier, Amsterdam, 3. edition, 2005.