

Freie Universität Berlin  
Fachbereich Mathematik und Informatik  
Institut für Mathematik  
Bachelorstudiengang Mathematik für das Lehramt

BACHELORARBEIT

# **Analyse einer Erzeugendenfunktion für das Frobenius-Münzproblem und ihrer Nullstellen**

*eingereicht von*

Sven Marschalek

*betreut von*

Prof. Matthias Beck (Erstkorrektor)

Prof. Dr. Alexandru Constantinescu (Zweitkorrektor)

10. Dezember 2021



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Mathematische Grundlagen</b>	<b>3</b>
2.1	Komplexe Polynomfunktionen und ihre Nullstellen . . . . .	3
2.2	Erzeugendenfunktionen . . . . .	7
2.3	Teilbarkeit und lineare diophantische Gleichungen . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Erzeugendenfunktionen für das Frobenius-Problem mit zwei teilerfremden Zahlen</b>	<b>13</b>
3.1	Lösungen des Frobenius-Problems für zwei teilerfremde Zahlen . . . . .	13
3.2	Zwei Erzeugendenfunktionen für das Frobenius-Problem mit zwei teilerfremden Zahlen . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Nullstellen von Frobenius-Erzeugendenfunktionen</b>	<b>19</b>
4.1	Nullstellen der Erzeugendenfunktion $p$ für teilerfremde Zahlen von 2 . . . .	19
4.2	Nullstellenvergleich von zwei Erzeugendenfunktionen für teilerfremde Zahlen von 2 . . . . .	21
4.3	Nullstellen der Erzeugendenfunktion $p$ für teilerfremde Zahlen von 3 oder größer . . . . .	22
<b>5</b>	<b>Fazit</b>	<b>33</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>35</b>

## Abbildungsverzeichnis

1	Einheitskreis und Kreisscheibe in der komplexen Zahlenebene. . . . .	3
2	Die fünften Einheitswurzeln in der komplexen Zahlenebene. . . . .	6
3	Nullstellen von $p(2, 7; z)$ in der komplexen Zahlenebene. . . . .	20
4	Nullstellen von $p(2, 2b + 1; z)$ und $p_2(2, b; z)$ für $b = 3$ und $b = 11$ . . . . .	21
5	Nullstellen von $p(a, b; z)$ mit $b - a = 1$ . . . . .	24
6	Nullstellen von $p(3, b; z)$ . . . . .	25
7	Nullstellen von $p(4, b; z)$ . . . . .	26
8	Nullstellen von $p(5, b; z)$ . . . . .	27
9	Nullstellen von $p(7, b; z)$ . . . . .	28

# 1 Einleitung

Die britische Wettkampffresserin Leah Shutkever stellte im November 2020 einen neuen Guinness World Record im Chicken-Nugget-Essen auf. In drei Minuten aß sie 775,1 Gramm des frittierten Hähnchens. Auf der Facebook-Seite der Guinness World Records lässt sich das Rekordessen per Video betrachten.<sup>1</sup> Dem mathematischen Auge entgeht dabei nicht, dass Shutkever insgesamt 46 Nuggets zu sich nimmt.

In Deutschland erhält man Chicken Nuggets beim Fastfood-Anbieter McDonalds üblicherweise in 6er-, 9er- oder 20er-Packungen. Nehmen wir einmal an, McDonalds würde die 6er-Packung aus dem Sortiment streichen. Und nehmen wir an, Shutkever hätte ihren Rekord nur unter der Zusatzbedingung aufstellen können, dass sie alle Nuggets, die sie bestellt, auch aufessen muss. Hätte ihr der Rekord in Deutschland gelingen können? Wie viele Chicken Nuggets hätte ihr Rekord umfassen können? Und was wäre die größte Anzahl an Nuggets, die Shutkever nicht hätte bestellen können?

Ähnlichen Fragen gehen Mathematiker\*innen seit fast 150 Jahren unter dem Siegel des sogenannten *Frobenius-Münzproblems* nach, das man aufgrund des hier geschilderten analogen Problem-Charakters auch als *Chicken-McNugget-Problem* bezeichnet. Der deutsche Mathematiker Ferdinand Georg Frobenius soll das Problem in seinen Vorlesungen beiläufig gestellt haben [6, S. 299]. Grundsätzlich geht es um folgende Frage: Angenommen es gäbe statt der vorhandenen Münzen nur noch Münzen mit teilerfremden Werten. Welche Beträge könnte man dann noch passend bezahlen und welche nicht? Und was wäre der größte nicht passend zahlbare Betrag? Oder um es formeller zu fassen:

**Definition 1.0.1.** Seien  $a_1, \dots, a_n$  teilerfremde positive ganze Zahlen, dann wird eine Zahl  $j$  mit  $(a_1, \dots, a_n)$ -darstellbar bezeichnet, wenn es  $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  gibt, so dass

$$m_1 a_1 + m_2 a_2 + \dots + m_n a_n = j.$$

Mit  $R_0(a_1, \dots, a_n)$  bezeichnen wir die Menge der Zahlen, die nicht  $(a_1, \dots, a_n)$ -darstellbar ist. Die Menge der Zahlen, die  $(a_1, \dots, a_n)$ -darstellbar ist, heißt  $S_0(a_1, \dots, a_n)$ .

Die Menge  $R_0(a_1, \dots, a_n)$  ist, wie wir in Abschnitt 2.3 zeigen, endlich. Wir können daher nach der größten nicht durch  $a_1, \dots, a_n$  darstellbaren Zahl fragen – der sogenannten *Frobenius-Zahl*. Die Endlichkeit der Menge  $R_0(a_1, \dots, a_n)$  liefert aber noch mehr mathematisch interessante Fragestellungen. Hier sind drei, die für uns eine wesentliche Rolle spielen:

- i) Welche ist die Frobenius-Zahl, also die größte Zahl  $g_0(a_1, \dots, a_n)$  in  $R_0(a_1, \dots, a_n)$ ?
- ii) Wie viele nicht-darstellbare Zahlen gibt es, also was ist die Mächtigkeit  $c_0(a_1, \dots, a_n)$  der Menge  $R_0(a_1, \dots, a_n)$ ?
- iii) Wie groß ist die Summe  $s_0(a_1, \dots, a_n)$  aller Elemente aus  $R_0(a_1, \dots, a_n)$ ?

---

<sup>1</sup>Abrufbar unter: <https://bit.ly/gwr-shutkever> [letzter Zugriff: 13.8.2021, 16:10 Uhr].

Georg Frobenius war ein Berliner Mathematiker, der von 1874 bis 1916 an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich und der Universität Berlin aktiv war. Nach Neumann [11] lieferte Frobenius zahlreiche wichtige Beiträge – insbesondere in den Feldern Algebra und Zahlentheorie. Dazu zählen unter anderem die Vermutung des Tschebotarjowschen Dichtigkeitssatzes, die Frobenius-Normalform für Matrizen, ein Beweis des Satzes von Cayley-Hamilton, die Frobenius-Automorphismen und die Theorie der Gruppencharaktere, die unter anderem die Grundlage für verschiedene physikalische und chemische Anwendungen der Gruppentheorie wurde.

Diese Arbeit befasst sich mit einer speziellen Betrachtung des Frobenius-Münzproblems für zwei teilerfremde Zahlen  $a$  und  $b$ . Sie folgt dabei einer Darstellung der Menge  $R_0(a, b)$  mit Hilfe von Erzeugendenfunktionen, wie sie sich zum Beispiel bei Bardomero und Beck [2] findet. Die durch  $a$  und  $b$  nicht darstellbaren Zahlen können nämlich als Exponenten einer Erzeugendenfunktion ausgedrückt werden, die – wie wir in Theorem 3.2.1 zeigen werden – die folgende Form aufweist:

$$p(a, b; z) = \sum_{j \in R_0(a, b)} z^j = \frac{1}{1 - z} - \frac{1 - z^{ab}}{(1 - z^a)(1 - z^b)}.$$

Die Erzeugendenfunktion  $p(a, b; z)$  ist eine Polynomfunktion im Gewand einer rationalen Funktion. Einer Argumentation von Bardomero und Beck [2] folgend leiten wir die Funktion in Kapitel 3 her und untersuchen sie anschließend auf ihre Nullstellen (Kapitel 4). Dabei nutzen wir die Teilerfremdheit von  $a$  und  $b$  insofern aus, dass ohne Einschränkung stets  $a < b$  gilt. So können wir  $a$  auf einen bestimmten Wert festlegen und dann das Verhalten der Nullstellen für  $b$  gegen unendlich betrachten. Und wir können  $a$  größer werden lassen und sehen, wie sich die Nullstellen von  $p(a, b; z)$  zum Beispiel für  $b = a + 1$  verhalten.

Es zeigt sich in Abschnitt 4.1, dass die Nullstellen für  $a = 2$  genau auf dem Einheitskreis liegen. Ein Vergleich der Nullstellen von  $p(2, b; z)$  mit den Nullstellen einer weiteren Erzeugendenfunktion für eine Variante des Frobenius-Münzproblems mit zwei teilerfremden Zahlen erfolgt in Abschnitt 4.2. In Unterkapitel 4.3 beobachten wir dann zunächst mit Hilfe einer computergestützten Analyse, dass sich die Nullstellen von  $p(a, b; z)$  für  $a \geq 3$  mit zunehmendem  $a$ , aber auch mit festem  $a$  und größer werdendem  $b$  immer mehr dem Einheitskreis annähern. Diese Beobachtung fassen wir in einer Vermutung zusammen, die wir durch das Aufstellen von Nullstellenschranken zwar nicht vollständig, aber zumindest in Teilen belegen können.

Das Studium der Beobachtungen, Sätze und Beweise in dieser Arbeit ist auch insofern interessant, weil wir auf eine Vielzahl mathematischer Themenfelder zurückgreifen. Dazu zählen die Geometrie der komplexen Zahlen, die Faktorisierung und Nullstellenberechnung von Polynomen, die Theorie der Erzeugendenfunktionen und die algebraische Lösung linearer diophantischer Gleichungen. Bevor wir uns also den zentralen Ergebnissen der Arbeit widmen, schaffen wir im folgenden Kapitel die mathematischen Grundlagen dafür.

## 2 Mathematische Grundlagen

### 2.1 Komplexe Polynomfunktionen und ihre Nullstellen

Wir betrachten in dieser Arbeit komplexe Nullstellen von Polynomfunktionen, insbesondere im Hinblick auf ihre Verteilung in der komplexen Zahlenebene. Wir beginnen daher mit etwas grundlegender Notation.

**Definition 2.1.1.** Es seien  $z_0, r \in \mathbb{C}$  und  $M$  eine Teilmenge der komplexen Zahlen.

- (i) Die Menge  $K(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$  heißt *offene Kreisscheibe* mit Mittelpunkt  $z_0$  und Radius  $r$ . Die Menge  $\overline{K}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$  wird *abgeschlossene Kreisscheibe* mit Mittelpunkt  $z_0$  und Radius  $r$  genannt.
- (ii) Die Menge  $C(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$  wird als *Kreis* mit Mittelpunkt  $z_0$  bezeichnet. Der *Einheitskreis* ist gerade die Menge  $\mathcal{E} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ .

Abbildung 1 soll die Begriffe für unsere Zwecke veranschaulichen. Man sieht in der Abbildung den rot dargestellten Einheitskreis sowie eine blau markierte kreisförmige Menge in  $\mathbb{C}$ . Es handelt sich um die abgeschlossene Kreisscheibe  $\overline{K}(z_0, r)$ . Der hellblau markierte Bereich stellt die offene Kreisscheibe  $K(z_0, r)$  dar. Die dunkelblaue Linie ohne das Innere des Kreises beschreibt den Kreis  $C(z_0, r)$ .

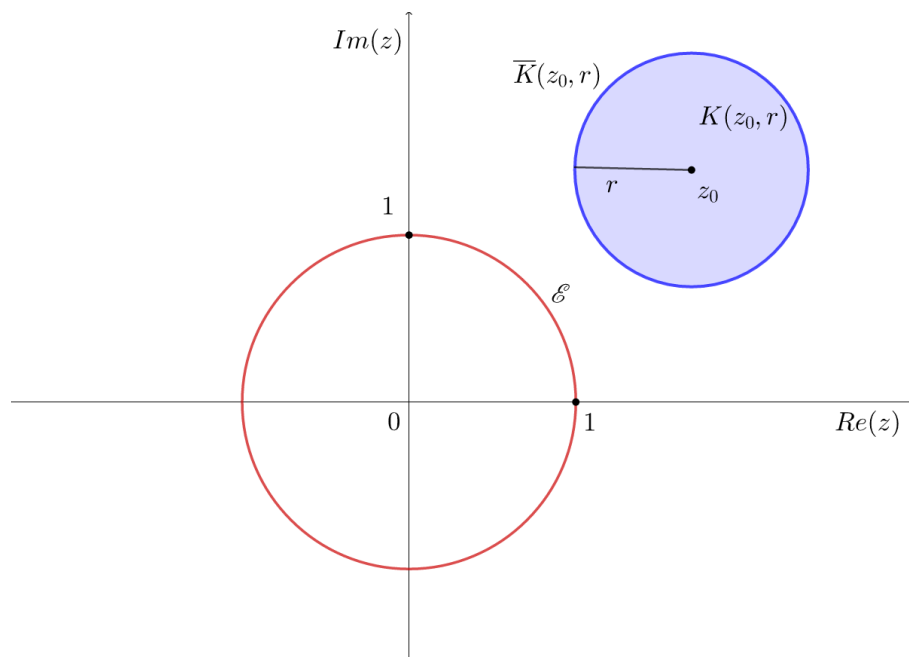


Abbildung 1: Einheitskreis und Kreisscheibe in der komplexen Zahlenebene.

Neben diesen basalen Begriffen der Geometrie der komplexen Zahlen wollen wir in diesem Abschnitt ein Verständnis dafür schaffen, was wir unter komplexen Nullstellen verstehen. Die entsprechenden Sätze, Korollare und Lemmata sind sehr grundlegend und folgen einer Argumentation von Werner [15, S. 112 ff.]. Hier sind sie daher ohne Beweis angeführt.

**Definition 2.1.2.** Eine Funktion  $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$  mit  $a_n \neq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$  heißt *Polynomfunktion*. Die komplexen Zahlen  $a_0, \dots, a_n$  werden *Koeffizienten* genannt, die Ausdrücke  $z, z^2, \dots, z^n$  werden als *Monome* bezeichnet. Der Koeffizient  $a_0$  heißt *Absolutglied*. Die natürliche Zahl  $n$  beschreibt den *Grad* der Polynomfunktion, man schreibt dafür  $\deg(p) = n$ . Polynome mit Grad 0 sind *konstante Polynome*. Gilt für ein konstantes Polynom  $a_0 = 0$ , dann nennt man dieses Polynom das *Nullpolynom*.

Es sei bemerkt, dass man in der Algebra die abbrechende Folge  $(a_0, \dots, a_n, 0, \dots)$  als Polynom bezeichnet und diese nicht nur über Körpern, sondern auch über kommutativen Ringen mit 1 definieren kann. Die in unserer Definition als Monome bezeichneten Ausdrücke können in algebraischen Polynomen nicht nur Körperelemente, sondern beispielsweise auch Matrizen über dem betrachteten Körper oder andere Polynome sein. Polynome tragen die Struktur eines Rings.

Für das Vorgehen in dieser Arbeit ist diese strenge Unterscheidung nicht ausschlaggebend, da wir vor allem Polynomfunktionen betrachten wollen, in denen die Koeffizienten reelle Zahlen sind und in die Monome komplexe Zahlen eingesetzt werden. Aus diesem Grund sprechen wir hier gelegentlich auch von Polynomen, wenn streng genommen die assoziierten Polynomfunktionen gemeint sind.

Hierfür wollen wir nun einige wichtige Eigenschaften festhalten und beginnen mit der Division mit Rest von Polynomen.

**Satz 2.1.3.** *Seien  $p$  und  $q$  Polynomfunktionen wie in Definition 2.1.2, wobei  $q$  nicht das Nullpolynom ist. Dann existieren eindeutig bestimmte Polynome  $P$  und  $R$  mit  $p = Pq + R$  und  $\deg(R) < \deg(q)$ .*

Satz 2.1.3 legt eine Grundlage für das Gelingen der Polynomdivision, die wir uns in dieser Arbeit zunutze machen. Für gegebene Polynome  $p$  und  $q$ , wobei  $q$  nicht das Nullpolynom ist, liefert die Division  $\frac{p}{q}$  nämlich das eindeutige Ergebnis  $P + \frac{R}{q}$ .

Wir wollen uns nun den Nullstellen von Polynomen zuwenden und beginnen hierfür mit der folgenden Begriffsklärung.

**Definition 2.1.4.** Sei  $p$  eine Polynomfunktion wie in Definition 2.1.2. Eine komplexe Zahl  $\zeta$  mit  $p(\zeta) = 0$  heißt *Nullstelle* der Polynomfunktion.

Nullstellen spielen für die Darstellung von Polynomen eine wichtige Rolle, denn Polynome lassen sich mit diesen effektiv faktorisieren. Das ist die zentrale Aussage des folgenden Korollars.

**Korollar 2.1.5.** *Sei  $p$  eine Polynomfunktion wie in Definition 2.1.2 und  $\zeta$  eine Nullstelle von  $p$ . Dann existieren eine eindeutige natürliche Zahl  $n = n(\zeta)$  und ein Polynom  $\tilde{p}$ , für das  $\zeta$  keine Nullstelle ist, so dass*

$$p(z) = \tilde{p}(z)(z - \zeta)^n. \quad (2.1)$$

Aus Darstellung (2.1) können wir beobachten, dass eine Nullstelle mehrfach Nullstelle eines Polynoms sein kann. Das motiviert die folgende Definition.



**Definition 2.1.6.** Sei  $p$  ein Polynom und  $\zeta$  eine Nullstelle von  $p$ . Dann bezeichnet man die Zahl  $n$  aus Korollar 2.1.5 bzw. Darstellung (2.1) als Vielfachheit von  $\zeta$ .

Aus den bisherigen Überlegungen lässt sich eine Faktorisierung für Polynomfunktionen herleiten, die alle Nullstellen auf einen Blick sichtbar macht. Überlegen wir uns dafür, dass  $\zeta_1$  eine Nullstelle des Polynoms  $p \neq 0$  mit der Vielfachheit  $n_1$  ist. Dann finden wir nach Korollar 2.1.5 eine Faktorisierung entsprechend  $p(z) = p_1(z)(z - \zeta_1)^{n_1}$ , wobei  $\zeta_1$  keine Nullstelle von  $p_1$  ist. Sei nun  $\zeta_2$  eine weitere Nullstelle von  $p$  mit  $\zeta_2 \neq \zeta_1$  und Vielfachheit  $n_2$ . Dann folgt wegen  $p(\zeta_2) = p_1(\zeta_2)(\zeta_2 - \zeta_1)^{n_1} = 0$ , dass  $p_1(\zeta_2) = 0$  gelten muss, also finden wir eine Faktorisierung gemäß  $p_1(z) = p_2(z)(z - \zeta_2)^{n_2}$ , wobei  $\zeta_2$  nicht Nullstelle von  $p_2$  ist. Dieses Verfahren können wir höchstens  $\deg(p)$  mal wiederholen und erhalten die Faktorisierung

$$p(z) = r(z)(z - \zeta_k)^{n_k} \cdots (z - \zeta_1)^{n_1}. \quad (2.2)$$

Dabei stehen die  $\zeta_j$  für die  $k$  Nullstellen des Polynoms  $p$ , die Vielfachheit von  $\zeta_j$  wird durch  $n_j$  beschrieben und  $r$  ist ein Polynom, das keine Nullstellen mehr aufweist.

Wir beobachten anhand dieses Ergebnisses, dass eine Polynomfunktion  $p \neq 0$  höchstens  $n$  Nullstellen haben kann. Der Fundamentalsatz der Algebra sagt uns außerdem, dass jedes nichtkonstante Polynom über dem Körper  $\mathbb{C}$  eine Nullstelle hat. Für die Summe der Vielfachheiten aller Nullstellen ergibt sich dann also genau  $n$ . In Darstellung (2.2) muss das Polynom  $r$  zudem ein konstantes Polynom sein. Tatsächlich erhalten wir für komplexe Polynome folgende Faktorisierung.

**Korollar 2.1.7.** Sei  $p$  ein Polynom wie in Definition 2.1.2 mit den paarweise verschiedenen Nullstellen  $\zeta_1, \dots, \zeta_k$  und zugehörigen Vielfachheiten  $n_1, \dots, n_k$ . Dann faktorisiert  $p$  gemäß folgender Darstellung:

$$p(z) = a_n(z - \zeta_k) \cdots (z - \zeta_1). \quad (2.3)$$

Vor dem Hintergrund dieses Korollars sagt man, dass komplexe Polynome stets in *Linearfaktoren* zerfallen. Komplexe Polynome erfüllen aber noch eine weitere wichtige Eigenschaft — jedenfalls in dem für uns interessanten Fall, dass alle Koeffizienten reelle Zahlen sind. Ihre nicht-reellen Nullstellen treten immer paarweise auf.

**Lemma 2.1.8.** Sei  $p$  ein Polynom gemäß Definition 2.1.2 mit reellen Koeffizienten und sei  $\zeta$  eine komplexe Nullstelle von  $p$ . Dann ist die komplex-konjugierte Zahl  $\bar{\zeta}$  ebenfalls eine Nullstelle von  $p$ .

Wir wollen zum Abschluss dieses Abschnitts einen wichtigen Spezialfall von Nullstellen besprechen, der uns bei der geometrischen Betrachtung von Nullstellen bestimmter Polynome helfen wird.

**Definition 2.1.9.** Die Nullstellen des Polynoms  $p(z) = z^n - 1$  heißen  *$n$ -te Einheitswurzeln*.

Man liest aus der Definition direkt ab, dass die Zahl 1 für jedes  $n$  eine Einheitswurzel ist. Die Zahl  $-1$  ist für jedes gerade  $n$  eine Einheitswurzel. Über dem Körper der komplexen Zahlen kann man die Einheitswurzeln aber noch genauer bestimmen.

**Lemma 2.1.10.** *Es sei  $n$  eine positive ganze Zahl. Für  $k = 0, \dots, n-1$  lauten die  $n$ -ten Einheitswurzeln  $c_k$  über  $\mathbb{C}$  dann:*

$$c_k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n} = e^{2\pi i k/n}.$$

Aus Lemma 2.1.10 können wir sofort folgern, dass die komplexen Einheitswurzeln auf dem Einheitskreis liegen, denn nach der Eulerschen Formel

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z| e^{i\varphi} \quad (2.4)$$

für eine komplexe Zahl  $z$  mit Argument  $\varphi$  ist der Betrag der Einheitswurzeln 1. Da das Teilen durch  $n$  den Abstand paarweise verschiedener Einheitswurzeln exakt gleich macht, bilden die Einheitswurzeln sogar ein regelmäßiges  $n$ -Eck. In Abbildung 2 sehen wir dies anhand der fünften Einheitswurzeln der komplexen Zahlenebene veranschaulicht. Deutlich wird dabei auch: Wie in Lemma 2.1.8 erwähnt treten nicht-reelle Nullstellen in Paaren auf.

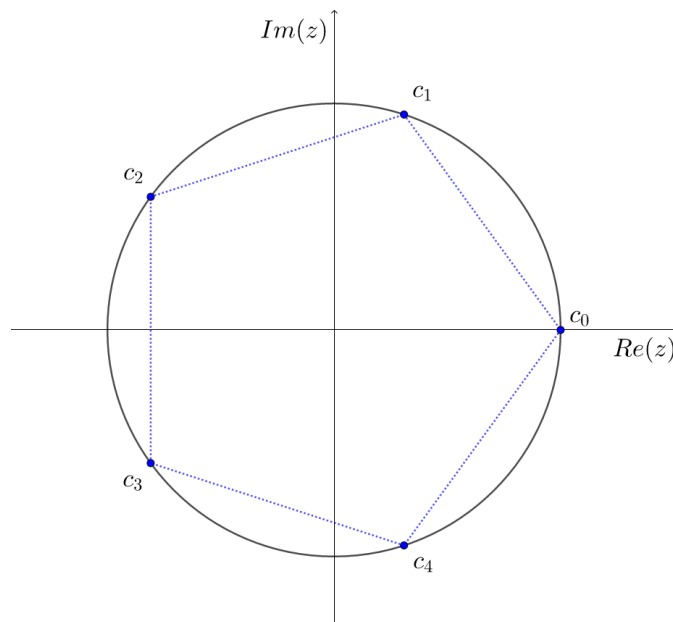


Abbildung 2: Die fünften Einheitswurzeln in der komplexen Zahlenebene.

Halten wir noch einen Spezialfall der Einheitswurzeln fest, der uns in Kapitel 4 viel Arbeit abnimmt. Da uns das Korollar auch für zentrale Aussagen der Arbeit weiterhilft, führen wir hier einen Beweis.

**Korollar 2.1.11.** *Die Nullstellen des Polynoms  $p$  mit  $p(z) = z^n + z^{n-1} + \dots + z + 1$  sind die  $(n+1)$ -Einheitswurzeln der komplexen Ebene ohne 1.*

*Beweis.* Betrachten wir die Polynomfunktion  $q(z) = z^{n+1} - 1$ , dessen Nullstellen nach Definition 2.1.9 die  $(n+1)$ -Einheitswurzeln der komplexen Zahlenebene sind. Wir wissen, dass 1 eine Einheitswurzel ist. Insbesondere ist 1 eine Nullstelle mit Vielfachheit 1. Also können wir nach Korollar 2.1.5  $(z-1)$  von  $q$  abspalten und erhalten

$$q(z) = (z-1)(z^n + z^{n-1} + \dots + z + 1) = (z-1)p(z),$$

wobei 1 keine Nullstelle von  $p$  ist. Also müssen die Nullstellen von  $p$  die übrigen  $(n + 1)$ -Einheitswurzeln sein. Und das wollten wir zeigen.  $\square$

Wir wollen diesen Abschnitt mit einem bekannten Satz des französischen Philosophen René Descartes abschließen, den wir ebenfalls im abschließenden Kapitel dieser Arbeit benötigen. Descartes beschäftigte sich im 17. Jahrhundert mit den positiven Lösungen von reellen Polynomgleichungen. Sein bekanntes Ergebnis wird heute als die Vorzeichenregel von Descartes bezeichnet (siehe zum Beispiel Satz 1.1.7 aus Dehmer [8]).

**Satz 2.1.12.** *Die Anzahl der positiven reellen Nullstellen des Polynoms*

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$$

mit  $a_i \in \mathbb{R}$  für  $i = 0, \dots, n$  ist gleich der Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Koeffizientenfolge von  $p(z)$  oder um eine gerade Zahl kleiner.

Interessant wird für uns vor allem die aus dem Satz resultierende Beobachtung sein, dass Polynomfunktionen mit nur einem Vorzeichenwechsel bei den Koeffizienten nur eine positive reelle Nullstelle aufweisen können. Bevor wir uns jedoch eingehender der Betrachtung von Nullstellen für Polynomfunktionen widmen, benötigen wir noch ein paar Grundlagen, die uns bei der Erarbeitung interessanter Polynome im Zusammenhang mit dem Frobenius-Münzproblem helfen werden.

## 2.2 Erzeugendenfunktionen

Dieser Abschnitt, dessen zentrale Aussagen wir von Pottmeyer [12, S. 197ff.] übernehmen, dient der Auseinandersetzung mit sogenannten Erzeugendenfunktionen. Erzeugendenfunktionen sind formale Ausdrücke von Potenzreihen, die man koeffizientenweise addiert und multipliziert wie Polynome. Im Abschnitt 2.1 hatten wir erwähnt, dass Polynome algebraisch betrachtet einen Ring bilden. Dies gilt auch für Erzeugendenfunktionen, wobei Addition und Multiplikation den gleichen Vorschriften folgen. Dies zeigt auch die folgende Definition.

**Definition 2.2.1.** Sei  $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$  eine Folge reeller Zahlen. Dann ist die *Erzeugendenfunktion* der Folge durch den Ausdruck

$$\sum_{j \geq 0} a_j z^j$$

definiert. Die Folgenglieder von  $(a_j)$  heißen *Koeffizienten* der Erzeugendenfunktion. Man addiert und multipliziert Erzeugendenfunktionen für Folgen  $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$  und  $(b_j)_{j \in \mathbb{N}}$  nach den folgenden Vorschriften:

$$\sum_{j \geq 0} a_j z^j + \sum_{j \geq 0} b_j z^j = \sum_{j \geq 0} (a_j + b_j) z^j; \quad (\text{Addition})$$

$$\sum_{j \geq 0} a_j z^j \cdot \sum_{j \geq 0} b_j z^j = \sum_{j \geq 0} \sum_{i=0}^j (a_i b_{j-i}) z^j. \quad (\text{Multiplikation})$$

Der Ring der Erzeugendenfunktionen wird mit  $\mathbb{R}[[x]]$  (bzw. in unserem Fall mit  $\mathbb{R}[[z]]$ ) bezeichnet. Wie im Polynomring ist auch hier 1 das neutrale Element der Multiplikation und die konstante Nullfunktion das neutrale Element der Addition.

Da wir nur ein sehr grundlegendes Verständnis von Erzeugendenfunktionen für die Betrachtungen in dieser Arbeit benötigen, setzen wir uns hier nicht umfangreich mit ihren Eigenschaften auseinander. Wir werden aber das klassische Grundlagenbeispiel für eine Erzeugendenfunktion herleiten, nämlich die geschlossene Form der Erzeugendenfunktion der konstanten 1-Folge.

**Beispiel 2.2.2.** Die Erzeugendenfunktion der konstanten 1-Folge hat die folgende geschlossene Form:

$$\sum_{j \geq 0} z^j = \frac{1}{1-z}. \quad (2.5)$$

Für die Begründung dieses Beispiels wollen wir etwas näher auf die Existenz multiplikativer Inverser von Erzeugendenfunktionen eingehen. Hierzu können wir folgenden Satz festhalten.

**Satz 2.2.3.** Die Erzeugendenfunktion  $\sum_{j \geq 0} a_j z^j$  hat genau dann ein multiplikatives Inverses in  $\mathbb{R}[[z]]$ , wenn  $a_0 \neq 0$  gilt.

*Beweis.* Wir wollen zunächst zeigen, dass  $a_0 \neq 0$  die Existenz eines multiplikativen Inversen impliziert. Das gelingt durch die rekursive Konstruktion einer Folge  $(b_j)_{j \in \mathbb{N}}$ , deren Erzeugendenfunktion dieses Inverse darstellt. Wegen  $a_0 \neq 0$  können wir  $b_0 = \frac{1}{a_0}$  definieren. Für  $j > 0$  setzen wir

$$b_j = \frac{-1}{a_0} \sum_{i=1}^j (a_i b_{j-i}) \quad (2.6)$$

und erhalten wegen der Voraussetzung für  $a_0$  erneut einen wohldefinierten Ausdruck. Für die Multiplikation der Erzeugendenfunktionen gilt nun:

$$\begin{aligned} a_0 \cdot b_0 &= a_0 \cdot \frac{1}{a_0} = 1 \text{ und} \\ \sum_{j \geq 1} a_j z^j \cdot \sum_{j \geq 1} b_j z^j &= \sum_{j \geq 1} \sum_{i=0}^j (a_i b_{j-i}) z^j \\ &= \sum_{j \geq 1} \left( a_0 b_j + \sum_{i=1}^j (a_i b_{j-i}) \right) z^j \\ &= \sum_{j \geq 1} \left( a_0 \cdot \frac{-1}{a_0} \sum_{i=1}^j (a_i b_{j-i}) + \sum_{i=1}^j (a_i b_{j-i}) \right) z^j \\ &= \sum_{j \geq 1} 0 \cdot z^j = 0, \end{aligned}$$

und damit ist das Produkt der Erzeugendenfunktionen insgesamt gleich 1.

Für die andere Implikationsrichtung bleibt noch der Fall  $a_0 = 0$  zu betrachten. Für die Multiplikation mit einer beliebigen Erzeugendenfunktion  $\sum_{j \geq 0} b_j z^j$  gilt nach Definition

$$\sum_{j \geq 0} a_j z^j \cdot \sum_{j \geq 0} b_j z^j = \sum_{j \geq 0} \sum_{i=0}^j (a_i b_{j-i}) z^j.$$

Wegen  $a_0 = 0$  ergibt sich  $a_0 \cdot b_0 = 0$  und damit 0 als erster Koeffizient der Erzeugendenfunktion im Ergebnis der Multiplikation. Damit kann diese nicht mehr gleich 1 sein.  $\square$

Die explizite Vorschrift zur Konstruktion von multiplikativen Inversen im Ring der Erzeugendenfunktion, die wir im letzten Beweis genutzt haben, hilft uns bei der Begründung von Beispiel 2.2.2. Für die konstante 1-Folge ergibt sich damit  $b_0 = 1$  sowie  $b_1 = -1$ . Für  $b_2$  ergibt Darstellung (2.6) gleich 0. Daraus folgt  $b_3 = 0$  und induktiv für jedes weitere Folgenglied ebenfalls der Wert 0. Wir erhalten als multiplikatives Inverses von  $\sum_{j \geq 0} z^j$  also  $1 - z$  und damit nach Division das Ergebnis aus Beispiel 2.2.2.

## 2.3 Teilbarkeit und lineare diophantische Gleichungen

Wie beschrieben untersuchen wir in dieser Arbeit Erzeugendenfunktionen, die sich mit dem Frobenius-Münzproblem für zwei teilerfremde Zahlen auseinandersetzen. Dieser Fall des Problems ist eng verwandt mit einem Spezialfall sogenannter diophantischer Gleichungen.

**Definition 2.3.1.** Eine Gleichung der Form  $p(z_1, z_2, \dots, z_n) = 0$  für eine Polynomfunktion  $p$  mit ganzzahligen Koeffizienten, für die nur ganzzahlige Lösungen gesucht werden, heißt *diophantische Gleichung*.

Die diophantischen Gleichungen sind nach dem griechischen Mathematiker Diophantos von Alexandria benannt. Ein berühmtes Beispiel sind die pythagoreischen Tripel der Form  $a^2 + b^2 = c^2$ . Wir untersuchen in dieser Arbeit lineare diophantische Gleichungen mit zwei Unbekannten  $m$  und  $n$ , also Gleichungen der Form

$$ma + nb = j. \tag{2.7}$$

Dabei sind  $m, n, a, b, j$  im Falle des Frobenius-Problems nicht-negative ganze Zahlen. In diesem Abschnitt behandeln wir aber zunächst den Fall beliebiger ganzer Zahlen.

Um uns den Lösungen der linearen diophantischen Gleichungen zu nähern, erinnern wir aber zunächst basierend auf Ausführungen von Beutelspacher [4, S. 84f.] noch an eine für uns relevante zahlentheoretische Grundlage.

**Definition 2.3.2.** Falls  $a = q \cdot n + r$  mit  $q, r \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ . Dann heißt  $r$  der *Rest* von  $a$  bei der Division durch  $n$ .

Jede ganze Zahl  $a$  hat genau einen solchen Rest, d.h. die Division mit Rest ist möglich und liefert ein eindeutiges  $r$ . Dies motiviert auch die Modulo-Arithmetik, die wir in den nachfolgenden Beweisen ebenfalls heranziehen werden. Dabei nutzen wir die Notation  $a \equiv b \pmod{c}$ , wenn zwei ganze Zahlen  $a, b$  beim Teilen durch die ganze Zahl  $c$  den gleichen Rest lassen.

Mit dieser Erinnerung, auf die wir uns im Folgenden berufen werden, kehren wir zurück zur Lösung der linearen diophantischen Gleichungen. In dem von uns betrachteten Fall sind  $a$  und  $b$  teilerfremde Zahlen und es gilt daher  $\text{ggT}(a, b) = 1$ . Das bedeutet auch  $ab \neq 0$ . Es ergibt sich dann folgendes Ergebnis:

**Satz 2.3.3.** Gegeben sei Gleichung (2.7) mit  $a, b, m, n, j \in \mathbb{Z}$  und  $\text{ggT}(a, b) = 1$ . Dann ist (2.7) lösbar. Ist  $(m_0, n_0)$  ein Lösungspaar, dann werden alle weiteren Lösungen geliefert durch

$$m = m_0 + kb \text{ und } n = n_0 - ka \text{ mit } k \in \mathbb{Z}.$$

Für den Beweis des Satzes nutzen wir einen Spezialfall des sogenannten Lemmas von Bézout. Wir geben hier vollständige Beweise für Satz 2.3.3 und das Lemma von Bézout, da wir Elemente der Beweise in späteren Ausführungen nutzen wollen. Andere Beweise finden sich zum Beispiel bei Beutelspacher [4, S. 23] oder Liesen und Mehrmann [10, S. 200f.].

**Lemma 2.3.4** (Lemma von Bézout). Seien  $a, b > 0$  teilerfremde ganze Zahlen. Dann existieren eindeutige  $s, t \in \mathbb{Z}$  mit  $1 = as - bt$  und  $0 \leq s < b$ ,  $0 \leq t < a$ .

*Beweis.* Wir beweisen die Aussage durch vollständige Induktion über  $\max(a, b)$ .

Induktionsanfang: Sei  $\max(a, b) = 1$ . Dann wähle  $s = 1$ ,  $t = 0$  und die Gleichung ist erfüllt.

Induktionsschritt: Sei nun  $\max(a, b) = n$  mit einer natürlichen Zahl  $n \geq 2$  und die Aussage sei für alle Zahlenpaare, deren Maxima kleiner als 2 sind, bereits bewiesen (Induktionsvoraussetzung).

Da für  $a = b$  die Bedingung der Teilerfremdheit nicht erfüllt wäre, gilt  $a \neq b$ . Ohne Einschränkung können wir also annehmen, dass  $a < b$  gilt. Damit gilt  $b = n$  und  $a < n$ . Wir betrachten nun das Zahlenpaar  $(a, b - a)$  und wollen auf dieses die Induktionsvoraussetzung anwenden. Da  $a \in \mathbb{N}$  positiv und  $b > a$  gelten, ist in jedem Fall  $\max(a, b - a) < n$ . Zu zeigen ist, dass dieses Zahlenpaar ebenfalls teilerfremd ist.

Nehmen wir an, dass  $a$  und  $b - a$  nicht teilerfremd sind. Wir wollen diese Aussage zum Widerspruch führen. Da die Zahlen nicht teilerfremd sind, gibt es eine natürliche Zahl  $q \geq 2$ , die sowohl  $a$  als auch  $b - a$  teilt. Damit gibt es natürliche Zahlen  $m, n$  für die gilt:  $a = mq$  und  $b - a = nq$ . Aber dann ist  $b = (b - a) + a = nq + mq = (n + m)q$  und somit wäre  $b$  ein Vielfaches von  $q$ . Dann wären aber  $a$  und  $b$  nicht teilerfremd, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist.

Wenn aber  $\max(a, b - a) < n$  und  $a, b - a$  teilerfremd sind, dann gilt für diese nach Induktionsvoraussetzung, dass es eindeutige ganze Zahlen  $x, y$  mit  $0 \leq x < b - a$  und  $0 \leq y < a$  gibt, für die gilt:  $xa - y(b - a) = 1$ .

Dann ist aber auch  $(x + y)a - yb = xa - y(b - a) = 1$ . Setze  $s = x + y$  und  $t = y$ , dann sind  $s$  und  $t$  eindeutig bestimmt und es gilt  $0 \leq s = x + y < b - a + a = b$  und  $0 \leq y < a$ . Wir haben also die gesuchten Zahlen  $s, t \in \mathbb{Z}$  gefunden.  $\square$

Mit dem Lemma von Bézout können wir nun Satz 2.3.3 beweisen.

*Beweis.* Ist  $b = \pm 1$ , dann können wir in Gleichung (2.7) für  $m$  eine beliebige ganze Zahl einsetzen und erhalten ein passendes ganzzahliges Resultat für  $n$ .

Ohne Einschränkung können wir also  $b > 1$  annehmen (der Fall  $b < 1$  lässt sich analog betrachten). Betrachten wir Gleichung (2.7) nun modulo  $b$ , dann ergibt sich wegen der

Teilbarkeit von  $nb$  durch  $b$  die Kongruenz  $ma \equiv j \pmod{b}$ . Wir wollen hierfür eine Lösung  $m_0$  finden. Da  $a, b$  teilerfremd sind, erhalten wir nach dem Lemma von Bézout  $s, t \in \mathbb{Z}$  mit  $sa + tb = 1$ . Dann ergibt sich:

$$j = j \cdot 1 = j(sa + tb) = jsa + jtb.$$

Äquivalent erhalten wir  $jtb = j - jsa$ . Wegen  $jt \in \mathbb{Z}$  erhalten wir damit  $b \mid (j - jsa)$  und das ist äquivalent zu  $jsa \equiv j \pmod{b}$ . Damit ist also  $js = m_0$  die gesuchte Lösung. Da für  $k \in \mathbb{Z}$  die Äquivalenz  $m_0 + kb \equiv m_0 \pmod{b}$  gilt, sind weitere Lösungen durch  $m = m_0 + kb$  gegeben.

Setzen wir dies in die Ausgangsgleichung ein, so erhalten wir  $a(m_0 + kb) + nb = j$  und nach Umformung  $n = \frac{j - am_0}{b} - ka$ . Da  $j \equiv am_0 \pmod{b}$  ist dabei sichergestellt, dass  $\frac{j - am_0}{b} = n_0$  eine ganze Zahl ist und damit auch  $n$ .

Wir haben also die Lösbarkeit nachgewiesen und die Lösungsmenge durch  $m$  und  $n$  wie gefordert beschrieben.  $\square$

Wie man zum Beispiel bei Whitelaw [16, §62.4] nachlesen kann, gilt das Lemma von Bézout auch für eine beliebige Anzahl teilerfremder Zahlen. Dies hilft uns im letzten Teil dieses Abschnitts dabei, die bereits in der Einleitung aufgeführte Behauptung zu beweisen, dass die Menge der nicht  $(a_1, \dots, a_n)$ -darstellbaren Zahlen für teilerfremde  $a_1, \dots, a_n$  endlich ist.

**Satz 2.3.5.** *Seien  $a_1, \dots, a_n$  teilerfremde und positive ganze Zahlen. Dann ist die Menge  $R_0(a_1, \dots, a_n)$  von nicht  $(a_1, \dots, a_n)$ -darstellbaren Zahlen endlich.*

*Beweis.* Wir nutzen eine Beweisstruktur von Gallier [9, S. 2f.] und zeigen, dass unter den gegebenen Voraussetzungen für alle positiven ganzen Zahlen  $j \geq (a_1 - 1)(a_2 + \dots + a_n - 1)$  eine Linearkombination der Form  $j = m_1 a_1 + \dots + m_n a_n$  mit positiven ganzen Zahlen  $m_1, \dots, m_n$  existiert.

Nach dem Lemma von Bézout für eine beliebige Anzahl teilerfremder Zahlen gibt es eine Darstellung

$$1 = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n$$

mit ganzen Zahlen  $x_1, \dots, x_n$ . Multipliziert man beide Seiten dieser Darstellung mit  $j$  erhält man zunächst eine Gleichung der Form

$$j = y_1 a_1 + \dots + y_n a_n \tag{2.8}$$

mit ganzen Zahlen  $y_1, \dots, y_n$ . In Definition 2.3.2 und der zugehörigen Erläuterung hatten wir wiedergegeben, dass jede ganze Zahl eine Restdarstellung aufweist. Diese wollen wir nutzen. Für  $y_2, \dots, y_n$  finden wir für  $j = 2, \dots, n$  bei Teilen mit der positiven ganzen Zahl  $a_1$  Restdarstellungen der Form  $y_j = a_1 q_j + r_j$  mit  $q_j \in \mathbb{Z}$  und  $r_j \in \{0, 1, \dots, a_1 - 1\}$ . Setzen wir in Darstellung (2.8) ein, erhalten wir

$$j = (y_1 + q_2 a_2 + \dots + q_n a_n) a_1 + r_2 a_2 + \dots + r_n a_n.$$

Wir haben also eine Darstellung für  $j$  gefunden, in der alle Koeffizienten bis auf den von  $a_1$  bereits notwendigerweise positiv sind. Ist  $r_1 := y_1 + q_2 a_2 + \cdots + q_n a_n$  ebenfalls positiv, dann sind wir fertig.

Betrachten wir also den Fall  $r_1 < 0$  und dafür die Menge

$$A = \{j \in \mathbb{Z} : j = r_1 a_1 + r_2 a_2 + \cdots + r_n a_n, r_1 < 0, 0 \leq r_j < a_1, j = 2, \dots, n\}.$$

Das Maximum der Menge  $A$  weist das im Betrag kleinstmögliche  $r_1$  und die größtmöglichen  $r_j$  auf. Aus diesem Grund ist nach Voraussetzung  $-a_1 + (a_1 - 1)(a_2 + \cdots + a_n)$  das Maximum von  $A$  und damit auch eine obere Schranke. Weil nach dem Lemma von Bézout alle ganzen Zahlen eine Darstellung wie in (2.8) besitzen, sind alle positiven ganzen Zahlen der Menge  $\mathbb{Z} \setminus A$  mit  $r_1 \geq 0$  darstellbar. Die kleinste Zahl in  $\mathbb{Z} \setminus A$  ist aber gerade

$$-a_1 + (a_1 - 1)(a_2 + \cdots + a_n) + 1 = (a_1 - 1)(a_2 + \cdots + a_n - 1)$$

und damit erhalten wir eine Darstellung wie gewünscht für alle positiven ganzen Zahlen  $j \geq (a_1 - 1)(a_2 + \cdots + a_n - 1)$ .  $\square$

Der Beweis von Satz 2.3.5 beschließt das Grundlagenkapitel dieser Arbeit. Wir betrachten nun die Lösungen für das Frobenius-Problem für zwei teilerfremde Zahlen und analysieren das Problem mit den Mitteln der Erzeugendenfunktionen. Im Vorbeilaufen werden wir dabei auch eine weitere obere Schranke für die Frobenius-Zahl finden, die uns die Endlichkeit der Menge  $R_0(a_1, \dots, a_n)$  noch einmal für den Fall  $n = 2$  vor Augen führt.



## 3 Erzeugendenfunktionen für das Frobenius-Problem mit zwei teilerfremden Zahlen

### 3.1 Lösungen des Frobenius-Problems für zwei teilerfremde Zahlen

Wir möchten in diesem Kapitel Lösungen des Frobenius-Problems für zwei teilerfremde Zahlen  $a, b$  darstellen. Zu Beginn wollen wir daher in diesem speziellen Kontext noch einmal an die drei eingangs gestellten Fragen im Zusammenhang mit dem Frobenius-Problem erinnern:

- i) Welche ist die Frobenius-Zahl, also die größte Zahl  $g_0(a, b)$  in der Menge der nicht  $(a, b)$ -darstellbaren Zahlen  $R_0(a, b)$ ?
- ii) Wie viele nicht-darstellbare Zahlen gibt es, also was ist die Mächtigkeit  $c_0(a, b)$  der Menge  $R_0(a, b)$ ?
- iii) Wie groß ist die Summe  $s_0(a, b)$  aller Elemente aus  $R_0(a, b)$ ?

Für zwei teilerfremde Zahlen besitzen diese Fragen erstaunlich einfache Antworten, wie der folgende Satz zeigt.

**Satz 3.1.1.** *Seien  $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  teilerfremd. Dann gilt:*

$$g_0(a, b) = (a - 1)(b - 1) - 1, \quad (3.9)$$

$$c_0(a, b) = \frac{1}{2}(a - 1)(b - 1) \text{ und} \quad (3.10)$$

$$s_0(a, b) = \frac{1}{12}(a - 1)(b - 1)(2ab - a - b - 1). \quad (3.11)$$

Zum Beweis sei zunächst auf die Erläuterungen in Bardomero und Beck [2, S. 2] sowie Beck und Robins [3, S. 17] verwiesen. Demnach wies der britische Mathematiker James Joseph Sylvester bereits 1882 den Wert von  $c_0(a, b)$  nach [14]. Sein Artikel aus dem Jahr 1884 [13] legt zudem nahe, dass er auch die Lösung für  $g_0$  kannte. Sylvester wird in der Literatur häufig als erster Mathematiker genannt, der den exakten Wert von  $g_0$  bewies. Tatsächlich ist allerdings nicht bekannt, wer diesen Wert zuerst herausfand. Beck und Robins [3, S. 17, Note 2] nennen das Ergebnis für  $g_0$  daher „one of the famous folklore results [and] one of the most misquoted theorems in all of mathematics“. Die Aussage für  $s_0(a, b)$  in (3.11) ist deutlich jünger und wurde offenbar zuerst von Brown und Shiue [7] gezeigt.

Wir wollen alle drei Ergebnisse im folgenden Abschnitt mit Hilfe von Erzeugendenfunktionen herleiten. Zuvor sei jedoch noch einmal auf die im Beweis von Satz 2.3.5 dargestellte obere Schranke verwiesen. Für zwei teilerfremde Zahlen  $a, b$  war demnach jede Zahl  $j = (a - 1)(b - 1)$  durch  $a$  und  $b$  darstellbar. Wir sehen nun, dass dieser Wert für zwei teilerfremde Zahlen eine scharfe obere Schranke darstellt, denn in der Tat ist die Frobenius-Zahl hier gerade  $(a - 1)(b - 1) - 1$ .

### 3.2 Zwei Erzeugendenfunktionen für das Frobenius-Problem mit zwei teilerfremden Zahlen

Die im letzten Abschnitt angegebenen Resultate lassen sich mit den Mitteln der Erzeugendenfunktionen schlussfolgern. Dies wollen wir in diesem Abschnitt leisten und benötigen dafür das folgende Theorem, das wir von Bardomero und Beck [2, S. 2, Theorem 1] übernehmen.

**Theorem 3.2.1.** *Sei  $S_0(a, b) = \{ma + nb : m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$  und seien  $a, b \in \mathbb{Z}_{> 0}$  zwei teilerfremde Zahlen. Dann gilt:*

$$\sum_{j \in S_0(a, b)} z^j = \frac{1 - z^{ab}}{(1 - z^a)(1 - z^b)}.$$

Auch im Beweis folgen wir der Struktur von Bardomero und Beck [2, S. 4f.], benötigen dafür aber zunächst drei Hilfslemmata.

**Lemma 3.2.2.** *Wir betrachten die Anzahl der Darstellungen von  $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  durch Linearkombinationen von  $a$  und  $b$ , die wie folgt definiert ist:*

$$r(a, b; j) := \left| \{(m, n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2 : ma + nb = j\} \right|.$$

Dann gilt:

$$\sum_{j \geq 0} r(a, b; j) z^j = \frac{1}{(1 - z^a)(1 - z^b)}.$$

*Beweis.* Wir erhalten zunächst mit Hilfe des Produkts für Erzeugendenfunktionen nach Definition 2.2.1:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1 - z^a)(1 - z^b)} &= \frac{1}{1 - z^a} \cdot \frac{1}{1 - z^b} \\ &= \sum_{j \geq 0} (z^a)^j \cdot \sum_{k \geq 0} (z^b)^k \\ &= \sum_{j \geq 0} \sum_{k=0}^j t_k s_{j-k} z^j, \end{aligned}$$

wobei  $(t_k)$  die Folge der Koeffizienten der Erzeugendenfunktion  $t(z) = \sum_{j \geq 0} (z^a)^j$  beschreibt und  $(s_k)$  die Folge der Koeffizienten der Erzeugendenfunktion  $s(z) = \sum_{j \geq 0} (z^b)^j$ . Es bleibt zu zeigen, dass für alle  $j \geq 0$  die Gleichheit  $r(a, b; j) = \sum_{k=0}^j t_k s_{j-k}$  gilt. Dafür beachten wir, dass die Koeffizienten von  $t(z)$  und  $s(z)$  nur die Werte 1 und 0 annehmen. Die Erzeugendenfunktion  $t(z)$  beschreibt dabei alle möglichen Werte von  $ma$ , denn  $t_k = 1$  gilt genau dann, wenn der Exponent der Variable  $z$  ein Vielfaches von  $a$  ist. Analog stellt  $s(z)$  genau die möglichen Werte von  $nb$  dar. Nun wissen wir, dass  $\sum_{k=0}^j t_k s_{j-k}$  genau der Summe über  $k = 0, \dots, j$  der Produkte entspricht, in denen  $t_k = 1$  und  $s_{j-k} = 1$  gilt. Das sind aber gerade alle möglichen Darstellungen, in denen  $ma + nb = j$  gilt. Also ist  $r(a, b; j) = \sum_{k=0}^j t_k s_{j-k}$ .  $\square$

**Lemma 3.2.3.** *Wir betrachten die Menge*

$$M_j = \{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : \exists n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : ma + nb = j\},$$

die alle  $m$  enthält, für die eine  $j$  darstellende Linearkombination aus  $a$  und  $b$  möglich ist. Dann gilt die Implikation:

$$m \in M_j \Rightarrow M_j = \left[0, \frac{j}{a}\right] \cap (m + b\mathbb{Z}).$$

*Beweis.* Um das Lemma einzusehen, sei  $m \in M_j$ . Wir wollen die Inklusionen

$$\left[0, \frac{j}{a}\right] \cap (m + b\mathbb{Z}) \subseteq M_j \text{ und } M_j \subseteq \left[0, \frac{j}{a}\right] \cap (m + b\mathbb{Z})$$

zeigen.

Die Inklusion  $\left[0, \frac{j}{a}\right] \cap (m + b\mathbb{Z}) \subseteq M_j$  ist offensichtlich, da in diesem Fall  $m \in M_j$  und  $m \in \left[0, \frac{j}{a}\right] \cap (m + b\mathbb{Z})$  nach Voraussetzung gelten.

Für die umgekehrte Inklusion gilt nach Voraussetzung nur  $m \in M_j$ . Wir zeigen nun zunächst  $m \in \left[0, \frac{j}{a}\right]$  per Widerspruchsbeweis. Angenommen  $m \notin \left[0, \frac{j}{a}\right]$ . Dann wäre  $m > \frac{j}{a}$  und damit  $ma > j$ . Dann gälte aber auch  $j = ma + nb > j$  und das ist ein Widerspruch. Es bleibt noch zu zeigen, dass alle  $m \in M_j$  auch in  $m + b\mathbb{Z}$  liegen. Dafür rufen wir uns Satz 2.3.3 in Erinnerung. Demnach sind die ganzzahligen Lösungen  $m$  von Gleichung (2.7) durch  $m = m_0 + bt$  mit  $t \in \mathbb{Z}$  und einer Lösung  $m_0$  gegeben. Dann beschreibt  $m$  aber gerade die Elemente von  $m + b\mathbb{Z}$ .

Wir haben also die Inklusionen  $M_j \subseteq \left[0, \frac{j}{a}\right] \cap (m + b\mathbb{Z})$  und  $M_j \supseteq \left[0, \frac{j}{a}\right] \cap (m + b\mathbb{Z})$  gezeigt und damit die geforderte Gleichheit.  $\square$

**Lemma 3.2.4.** *Sei  $r(a, b; j)$  wie in Lemma 3.2.2. Dann gilt:*

$$r(a, b; j) \leq 1 \text{ für } j < ab \text{ und} \tag{3.12}$$

$$r(a, b; j) = r(a, b; j - ab) + 1 \text{ für } j \geq ab. \tag{3.13}$$

*Beweis.* Wir nutzen erneut die Menge  $M_j$  aus Lemma 3.2.3. Für (3.12) sei  $j < ab$ . Wir wollen zeigen, dass dann  $r(a, b; j) = |M_j| \leq 1$  gilt. Gibt es kein  $m \in M_j$  sind wir fertig. Sei also  $m_1$  ein Element von  $M_j$ . Dann gilt nach Lemma 3.2.3  $m \in \left[0, \frac{j}{a}\right]$  und wegen  $j < ab$  wissen wir  $\frac{j}{a} < b$ . Gibt es ein weiteres Element  $m_2 \in M_j$ , dann gilt nach Lemma 3.2.3 dafür  $m_2 = m_1 + tb$  für ein  $t \in \mathbb{Z}$ . Da aber die Länge des Intervalls  $\left[0, \frac{j}{a}\right]$  kleiner als  $b$  ist, muss  $t = 0$  und damit  $m_1 = m_2$  gelten. Also ist  $|M_j| \leq 1$ .

Für (3.13) sei  $j \geq ab$ . Wir wollen zeigen, dass die Menge  $M_j \setminus M_{j-ab}$  genau ein Element enthält, denn das ist äquivalent zur Aussage  $r(a, b; j) - r(a, b; j - ab) = 1$ . Dafür betrachten wir  $m \in M_{j-ab}$ . Dann gibt es ein  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , so dass  $ma + nb = j - ab$  gilt und daraus folgt  $ma + (n + a)b = j$ . Also liegt  $m$  auch in  $M_j$  und damit gilt  $M_{j-ab} \subset M_j$ . Jetzt können wir die Menge  $M_j \setminus M_{j-ab}$  untersuchen. Nach Lemma 3.2.3 gilt  $M_j = \left[0, \frac{j}{a}\right] \cap (m + b\mathbb{Z})$  und  $M_{j-ab} = \left[0, \frac{j-ab}{a}\right] \cap (m + b\mathbb{Z})$ . Daraus folgt also:

$$M_j \setminus M_{j-ab} = \left(\frac{j}{a} - b, \frac{j}{a}\right] \cap (m + b\mathbb{Z}).$$

Diese Menge kann höchstens ein Element enthalten, denn ist  $m \in M_j \setminus M_{j-ab}$ , dann ist  $m + bt$  mit  $t \in \mathbb{Z}$  gleich  $m$  für  $t = 0$ , kleiner  $\frac{j}{a} - b$  für  $t < 0$  oder größer  $\frac{j}{a}$  für  $t > 0$ .

Um die Existenz von mindestens einem Element in  $M_j \setminus M_{j-ab}$  zu zeigen, benötigen wir Satz 2.3.3. Danach gibt es eine ganzzahlige Lösung  $m_0$  für Gleichung (2.7). Liege diese im halboffenen Intervall  $(x, x + b]$ . Weil nach dem gleichen Satz alle Lösungen durch  $m_0 + kb$  gegeben sind, existiert auch eine Lösung für  $m$  in  $(\frac{j}{a} - b, \frac{j}{a}]$  und demnach in  $M_j \setminus M_{j-ab}$ . Folglich ist  $|M_j \setminus M_{j-ab}| \geq 1$  und  $|M_j \setminus M_{j-ab}| \leq 1$ , also  $|M_j \setminus M_{j-ab}| = 1$  — und das wollten wir zeigen.  $\square$

Unabhängig davon, dass Lemma 3.2.4 uns beim Beweis von Theorem 3.2.1 hilft, leiten wir daraus die Beobachtung ab, dass es für  $j \geq ab$  immer eine Darstellung  $ma + nb = j$  gibt. Wir haben mit  $j = ab$  wie angekündigt also eine weitere obere Schranke für die Frobenius-Zahl gefunden.

Theorem 3.2.1 liefert aber eine genauere Aussage, und zwar nicht nur über die Frobenius-Zahl, sondern auch über die Anzahl  $c_0(a, b)$  der durch  $a$  und  $b$  nicht-darstellbaren Zahlen und deren Summe  $s_0(a, b)$ . Hier folgt daher nun der Beweis des Theorems.

*Beweis von Theorem 3.2.1.* Nach Lemma 3.2.4 gilt zunächst:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in S_0(a,b)} z^j &= \sum_{j=0}^{ab-1} r(a, b; j) z^j + \sum_{j \geq ab} (r(a, b; j) - r(a, b; j - ab)) z^j \\ &= \sum_{j \geq 0} (r(a, b; j) z^j - \sum_{j \geq ab} (r(a, b; j - ab) z^j) \\ &= \sum_{j \geq 0} (r(a, b; j) z^j - \sum_{j \geq 0} (r(a, b; j) z^{j+ab}) \\ &= (1 - z^{ab}) \sum_{j \geq 0} (r(a, b; j) z^j); \end{aligned}$$

und in Verbindung mit Lemma 3.2.2 erhalten wir dann die zu zeigende Aussage:

$$\sum_{j \in S_0(a,b)} z^j = (1 - z^{ab}) \sum_{j \geq 0} (r(a, b; j) z^j) = \frac{1 - z^{ab}}{(1 - z^a)(1 - z^b)}. \quad \square$$

In Beispiel 2.2.2 hatten wir  $\sum_{j \geq 0} z^j = \frac{1}{1-z}$  gesehen. Wir können also alle durch  $a$  und  $b$  nicht darstellbaren Zahlen mit Hilfe von Theorem 3.2.1 einfach durch Subtraktion ermitteln. Es ergibt sich die Polynomfunktion

$$p(a, b; z) = \sum_{j \in R_0(a,b)} z^j = \sum_{j \geq 0} z^j - \sum_{j \in S_0(a,b)} z^j = \frac{1}{1-z} - \frac{1 - z^{ab}}{(1 - z^a)(1 - z^b)}. \quad (3.14)$$

Durch Erweitern, Zusammenfassen und Ausmultiplizieren erhalten wir die alternativen Formen

$$p(a, b; z) = \frac{(z - 1)(z^{ab} - 1) - (z^a - 1)(z^b - 1)}{(z - 1)(z^a - 1)(z^b - 1)} \quad (3.15)$$

$$= \frac{z^{ab+1} - z^{ab} - z^{a+b} + z^b + z^a - z}{z^{a+b+1} - z^{a+b} - z^{b+1} + z^b - z^{a+1} + z^a + z - 1}. \quad (3.16)$$

Die in Satz 3.1.1 angegebenen Lösungen des Frobenius-Problems für teilerfremde Zahlen  $a$  und  $b$  können wir mit Hilfe von  $p(a, b; z)$  aus einfachen Überlegungen berechnen. Hier folgt also der Beweis des Satzes.

*Beweis von Satz 3.1.1.* Die größtmögliche nicht-darstellbare Zahl  $g_0(a, b)$  entspricht dem Grad von  $p(a, b; z)$ . Dieser ergibt sich zum Beispiel aus dem ersten Schritt der Polynomdivision von Darstellung (3.16), das heißt aus der Subtraktion der Exponenten der führenden Monome. Also:

$$\deg(p(a, b; z)) = ab + 1 - (a + b + 1) = ab - a - b = (a - 1)(b - 1) - 1.$$

Da die Summanden in  $p(a, b; z)$  genau dann 1 als Koeffizient aufweisen, wenn das zugehörige Monom einen nicht  $(a, b)$ -darstellbaren Exponenten besitzt, berechnet sich die Mächtigkeit von  $R_0(a, b)$  über den Wert von  $p(a, b; z)$  für  $z = 1$ . Da die von uns berechnete geschlossene Form an der Stelle  $z = 1$  aber nicht definiert ist, betrachten wir  $\lim_{z \rightarrow 1} p(a, b; z)$  — und dafür gibt zum Beispiel die Berechnung mit Maple den geforderten Wert aus:

$$\lim_{z \rightarrow 1} p(a, b; z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}(a - 1)(b - 1).$$

Eine analoge Überlegung liefert uns den Wert für  $s_0(a, b)$ . Da die Koeffizienten der Ableitung nämlich genau die nicht  $(a, b)$ -darstellbaren Exponenten in  $p(a, b; z)$  sind, suchen wir nun den Wert  $p'(a, b; 1)$ . Erneut ergibt sich allerdings eine Definitionslücke für die geschlossene Form, sodass auch hier eine Grenzwertbetrachtung notwendig ist. Dafür ergibt sich in der Maple-Berechnung

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1} p'(a, b; z) &= \frac{1}{6}a^2b^2 - \frac{1}{4}a^2b - \frac{1}{4}ab^2 + \frac{1}{12}a^2 + \frac{1}{12}b^2 + \frac{1}{4}ab - \frac{1}{12} \\ &= \frac{1}{12}(a - 1)(b - 1)(2ab - a - b - 1). \quad \square \end{aligned}$$

Bardomero und Beck [2, S. 3] entwickeln für das Frobenius-Problem eine weitere Erzeugendenfunktion. Das Problem wird dazu in einer Variante betrachtet. Hierzu sei für teilerfremde Zahlen  $a_1, \dots, a_n$  die Menge  $R_k(a_1, \dots, a_n)$  definiert als die Menge aller positiven ganzen Zahlen mit exakt  $k$  Darstellungen wie in Definition 1.0.1. Die größte Zahl in  $R_k(a_1, \dots, a_n)$  wird analog mit  $g_k(a_1, \dots, a_n)$ , die Kardinalität mit  $c_k(a_1, \dots, a_n)$  und die Summe aller Elemente mit  $s_k(a_1, \dots, a_n)$  bezeichnet. Die von Bardomero und Beck entwickelte Erzeugendenfunktion ist im folgenden Satz wiedergegeben.

**Satz 3.2.5.** *Gegeben seien teilerfremde positive ganze Zahlen  $a, b$ . Das Polynom, das alle exakt  $k$ -mal wie in Definition 1.0.1 darstellbaren Zahlen wiedergibt, lautet dann*

$$\begin{aligned} p_k(a, b; z) &:= \sum_{j \in R_k(a, b)} z^j \\ &= \frac{z^{ab(k-1)}(1 - z^{ab})^2}{(1 - z^a)(1 - z^b)} \\ &= z^{ab(k-1)}(1 + z^a + z^{2a} + \dots + z^{(b-1)a})(1 + z^b + z^{2b} + \dots + z^{(a-1)b}). \end{aligned}$$

Wir zitieren dieses Ergebnis hier ohne weiteren Beweis, weil es in dieser Arbeit nur am Rande um die Betrachtung des Frobenius-Problems in der Variante der  $k$ -Darstellbarkeit geht. Im Wesentlichen benötigen wir die Polynomfunktion in Satz 3.2.5 um ihre Nullstellen im folgenden Kapitel für den Fall  $a = 2$  mit denen des zuvor entwickelten Polynoms  $p(2, b; z)$  zu vergleichen. Dafür wollen wir diese Nullstellen nun genauer analysieren.

## 4 Nullstellen von Frobenius-Erzeugendenfunktionen

### 4.1 Nullstellen der Erzeugendenfunktion $p$ für teilerfremde Zahlen von 2

Wir betrachten zunächst den Fall  $a = 2$  in der Darstellung (3.16). Dann gilt:

$$p(2, b; z) = \frac{z^{2b+1} - z^{2b} - z^{b+2} + z^b + z^2 - z}{z^{b+3} - z^{b+2} - z^{b+1} + z^b - z^3 + z^2 + z - 1}.$$

Per Polynomdivision können wir diese Darstellung in eine Polynomfunktion überführen, die unserer Definition 2.1.2 genügt. Dass die Polynomdivision aufgeht, ergibt sich hier rechnerisch, steht aber aufgrund der Herleitung von  $p(a, b; z)$  aus der Erzeugendenfunktion  $\sum_{j \in R_0(a,b)} z^j$ , die nur 0 und 1 als Koeffizienten aufweist, auch bereits a priori fest.

Im Divisions-Algorithmus ergibt sich

$$\begin{aligned} & z^{2b+1} - z^{2b} - z^{b+2} + z^b + z^2 - z : z^{b+3} - z^{b+2} - z^{b+1} + z^b - z^3 + z^2 + z - 1 \\ &= z^{b-2} + \frac{z^{2b-1} - z^{2b-2} - z^{b+2} + z^{b+1} - z^{b-1} - z^{b-2} + z^2 - z}{z^{b+3} - z^{b+2} - z^{b+1} + z^b - z^3 + z^2 + z - 1} \\ & \quad \vdots \\ &= z^{b-2} + z^{b-4} + \dots + z^3 + \frac{z^{b+4} - z^{b+3} - z^{b+2} + z^{b+1} - z^4 - z^3 + z^2 - z}{z^{b+3} - z^{b+2} - z^{b+1} + z^b - z^3 + z^2 + z - 1} \\ &= z^{b-2} + z^{b-4} + z^{b-6} + \dots + z^3 + z. \end{aligned}$$

Es sei bemerkt, dass  $b$  wegen der vorausgesetzten Teilerfremdheit zu  $a$  immer ungerade sein muss. Wir erhalten also das ungerade Polynom

$$p(2, b; z) = z^{b-2} + z^{b-4} + z^{b-6} + \dots + z^3 + z. \quad (4.17)$$

Veranschaulichen wir uns dieses Ergebnis noch einmal an einem Beispiel.

**Beispiel 4.1.1.** Sei  $b = 7$ . Dann ergibt sich bei der Polynomdivision

$$\begin{aligned} & z^{15} - z^{14} - z^9 + z^7 + z^2 - z : z^{10} - z^9 - z^8 + z^7 - z^3 + z^2 + z - 1 \\ &= z^5 + \frac{z^{13} - z^{12} - z^9 + z^8 - z^6 - z^5 + z^2 - z}{z^{10} - z^9 - z^8 + z^7 - z^3 + z^2 + z - 1} \\ &= z^5 + z^3 + \frac{z^{11} - z^{10} - z^9 + z^8 - z^4 - z^3 + z^2 - z}{z^{10} - z^9 - z^8 + z^7 - z^3 + z^2 + z - 1} \\ &= z^5 + z^3 + z. \end{aligned}$$

Wir wollen jetzt nachweisen, dass alle Nullstellen des Polynoms  $p(2, b; z)$  außer der 0 auf dem Einheitskreis in der komplexen Ebene liegen. Es ist offensichtlich, dass  $\zeta_1 = 0$  eine Nullstelle ist, denn hierfür kann man aus Darstellung (4.17) einfach  $z$  ausklammern. Das entstehende Produkt besteht aus den Faktoren  $z$  und dem geraden Polynom

$$g(z) = z^{b-3} + z^{b-5} + z^{b-7} + \dots + z^2 + 1. \quad (4.18)$$

Setze nun  $z^2 = x$ , dann erhalten wir die Polynomfunktion

$$r(x) = \sum_{k=0}^{\frac{b-3}{2}} x^k.$$

Nach Korollar 2.1.11 beobachten wir, dass die Nullstellen des Polynoms  $r$ , dessen Koeffizienten  $a_0, \dots, a_n$  alle 1 sind, gerade die  $(\frac{b-3}{2} + 1)$ -Einheitswurzeln ohne 1 sind. Wir wissen nach Lemma 2.1.10, dass die Einheitswurzeln alle auf dem Einheitskreis liegen und gerade von der Form  $c_k = \cos \frac{4\pi k}{b-1} + i \sin \frac{4\pi k}{b-1} = e^{4\pi i k / (b-1)}$  mit  $k = 1, \dots, \frac{b-3}{2}$  sind.

Wir müssen also lediglich noch resubstituieren. Ist  $c_k$  eine Nullstelle von  $r$ , dann sind  $c_k^{\frac{1}{2}}$  und  $-c_k^{\frac{1}{2}}$  Nullstellen von  $g(z)$  und damit auch von  $p(2, b; z)$ . Für  $c_k = e^{4\pi i k / (b-1)}$  erhalten wir also die Nullstellen  $\zeta_{k,1} = e^{2\pi i k / (b-1)}$  und  $\zeta_{k,2} = -e^{2\pi i k / (b-1)}$ . Wir erkennen sofort, dass auch hier gilt  $|\zeta_{k,1}| = |\zeta_{k,2}| = 1$ . Und damit liegen alle von Null verschiedenen Nullstellen von  $p(2, b; z)$  auf dem Einheitskreis. Halten wir dieses Ergebnis fest und betrachten ein Beispiel dazu.

**Theorem 4.1.2.** *Die Nullstellen des Polynoms  $p(2, b; z)$  sind  $\zeta_0 = 0$  sowie  $\zeta_{k,1} = e^{2\pi i k / (b-1)}$  und  $\zeta_{k,2} = -e^{2\pi i k / (b-1)}$  für  $k = 1, \dots, \frac{b-3}{2}$ .*

**Beispiel 4.1.3.** Veranschaulichen wir uns dieses Ergebnis noch einmal am Fall  $b = 7$ . Dafür hatten wir in Beispiel 4.1.1 die Polynomfunktion  $p(2, 7; z) = z^5 + z^3 + z$  ausgerechnet. Die Nullstellen sind in Abbildung 3 dargestellt. Wie nach Lemma 2.1.8 zu erwarten ist, treten sie in komplex-konjugierten Paaren auf. Dabei ist  $\zeta_{1,1} = \overline{\zeta_{2,2}}$  und  $\zeta_{2,1} = \overline{\zeta_{1,2}}$ .

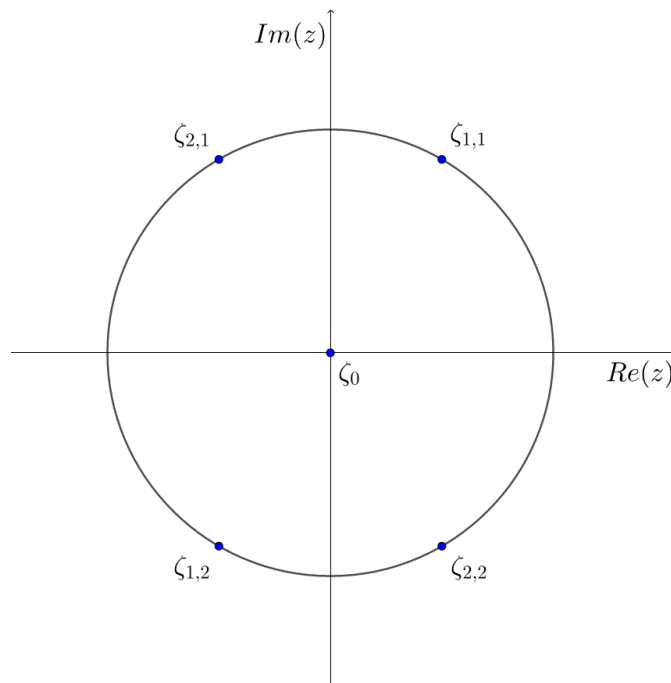


Abbildung 3: Nullstellen von  $p(2, 7; z)$  in der komplexen Zahlenebene.



Nach Theorem 4.1.2 ergeben sich für die Nullstellen rechnerisch die folgenden Werte:

$$\begin{aligned}\zeta_0 &= 0, \\ \zeta_{1,1} &= e^{2\pi i/6}, \\ \zeta_{1,2} &= -e^{2\pi i/6}, \\ \zeta_{2,1} &= e^{4\pi i/6} \text{ und} \\ \zeta_{2,2} &= -e^{4\pi i/6}.\end{aligned}$$

Nach diesem Beispiel wollen wir im nun folgenden Abschnitt die rechnerisch ermittelten Nullstellen für  $p(2, b; z)$  mit den Nullstellen von  $p_k(2, b; z)$  vergleichen.

## 4.2 Nullstellenvergleich von zwei Erzeugendenfunktionen für teilerfremde Zahlen von 2

Eine interessante Beobachtung liefert der Vergleich der Nullstellen von  $p(2, b; z)$  mit denen des in Satz 3.2.5 definierten  $p_k(2, b; z)$ . Tatsächlich findet man hier nämlich — lässt man Vielfachheiten außen vor — für bestimmte Werte eine vollständige Übereinstimmung der Nullstellen. Beispielhaft ist dies in Abbildung 4 für  $p$  und  $p_2$  dargestellt. Wie gezeigt liegen die Nullstellen mit Ausnahme der Null alle auf dem Einheitskreis der komplexen Zahlenebene.

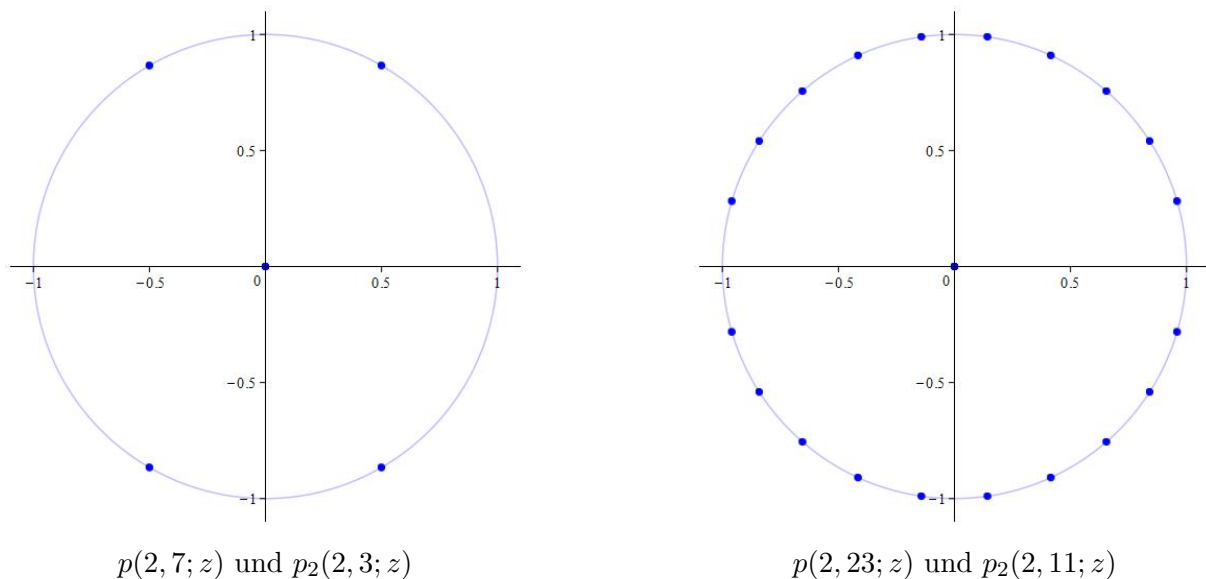


Abbildung 4: Nullstellen von  $p(2, 2b + 1; z)$  und  $p_2(2, b; z)$  für  $b = 3$  und  $b = 11$ .

Den allgemeinen Fall der Nullstellenübereinstimmung beschreibt das folgende Theorem.

**Theorem 4.2.1.** *Sei  $k \geq 2$ . Von Vielfachheiten abgesehen stimmen die Nullstellen von  $p(2, 2b + 1; z)$  und  $p_k(2, b; z)$  überein. Für  $k = 1$  stimmen die Nullstellen abgesehen von Vielfachheiten und mit Ausnahme der Nullstelle  $\zeta_0 = 0$  überein.*

*Beweis.* Wir erinnern uns zunächst, dass die von Null verschiedenen Nullstellen von  $p(2, b; z)$  nach Darstellung (4.18) gerade die Nullstellen des Polynoms  $z^{b-3} + z^{b-5} + z^{b-7} + \dots + z^2 + 1$  waren. Also sind die von Null verschiedenen Nullstellen von  $p(2, 2b+1; z)$  die Nullstellen des Polynoms  $z^{2b-2} + z^{2b-4} + z^{2b-6} + \dots + z^2 + 1$ . Nun gilt nach Satz 3.2.5 aber gerade

$$\begin{aligned} p_k(2, b; z) &= z^{2b(k-1)}(1 + z^2 + \dots + z^{2(b-1)} + z^b + z^{2+b} + \dots + z^{2(b-1)+b}) \\ &= z^{2b(k-1)}(1 + z^2 + \dots + z^{2b-2})(1 + z^b). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Die Nullstellen von  $p_k(2, b; z)$  ergeben sich also, wenn einer der drei in (4.19) dargestellten Terme null wird. Betrachten wir jeden Term einzeln, sehen wir: Der erste Term wird für  $z = 0$  eine  $2b(k-1)$ -fache Nullstelle. Für  $k = 1$  entfällt der Term und damit die Nullstelle  $\zeta_0 = 0$ . Für den zweiten Term erhalten wir wie im oberen Teil des Beweises angegeben gerade die Nullstellen des Polynoms  $p(2, 2b+1; z)$ . Und der dritte Term wird, da  $b$  ungerade ist, gerade null, wenn  $z$  die negativen Werte der  $b$ -ten Einheitswurzeln annimmt. Allerdings ist  $p_k$  für  $-1$  wegen  $a = 2$  nicht definiert und die übrigen negativen Einheitswurzeln sind nach Theorem 4.1.2 auch Nullstellen des zweiten Terms. Und damit sind alle Aussagen des Theorems gezeigt.  $\square$

Der Beweis liefert im Übrigen auch die zusätzliche Beobachtung, dass die Nullstellen von  $p_k(2, b; z)$  mit Ausnahme der Null grundsätzlich wie bei  $p(2, b; z)$  immer auf dem Einheitskreis liegen. In (4.19) sind alle möglichen Nullstellen ablesbar. Neben der Null für den ersten Term ergeben sich dabei alle Nullstellen aus dem zweiten Term. Und hier kann man der gleichen Argumentation folgen, die wir im Abschnitt 4.1 genutzt haben, um nachzuweisen, dass bis auf eine Ausnahme alle Nullstellen von  $p(2, b; z)$  auf dem Einheitskreis liegen. Grund dafür ist, dass die Exponenten der Monome im betrachteten Term alle gerade sind und jeweils um 2 kleiner werden.

Für den Fall  $a = 2$  haben wir die Nullstellen der Polynomfunktionen  $p$  und  $p_k$  nun eingehend betrachtet. Im Folgenden wählen wir größere  $a$ -Werte und betrachten ausschließlich  $p$ . Für die Lage der Nullstellen ergeben sich dabei wesentliche Unterschiede.

### 4.3 Nullstellen der Erzeugendenfunktion $p$ für teilerfremde Zahlen von 3 oder größer

In diesem Abschnitt betrachten wir die Nullstellen der Polynomfunktion  $p(a, b; z)$  für  $a \geq 3$ . Eine computergestützte Berechnung der Nullstellen für  $a = 3$ ,  $a = 4$ ,  $a = 5$  und  $a = 7$  zeigt hierbei schnell, dass die von Null verschiedenen Nullstellen im Gegensatz zum Fall  $a = 2$  hier nicht mehr alle auf dem Einheitskreis liegen. Bevor wir aber die Nullstellen näher betrachten, wollen wir eine offensichtliche Nullstelle direkt als Ergebnis festhalten.

**Satz 4.3.1.** *Für  $a \geq 3$  ist  $\zeta_0 = 0$  immer eine Nullstelle von  $p(a, b; z)$ .*

*Beweis.* Die Polynomfunktion  $p(a, b; z)$  hat das Absolutglied Null, daher kann man aus jeder Darstellung ein  $z$  ausklammern und erhält eine Produktdarstellung für die  $z = 0$  offensichtlich eine Nullstelle ist.  $\square$

Abgesehen von diesem offensichtlichen Ergebnis gestalten sich weitere Aussagen über die Nullstellen von  $p(a, b; z)$  für  $a \geq 3$  nicht mehr so einfach. Auf den nachfolgenden Seiten sind die Nullstellen von  $p(a, b; z)$  daher zunächst basierend auf Maple-Berechnungen für ausgewählte  $a$ - und  $b$ -Werte dargestellt.

Abbildung 5 zeigt die Nullstellen für  $a = 3, 4, 5, 7, 8, 10$  jeweils mit  $b = a + 1$ . Dabei wird  $a$  von der Teilabbildung links oben im Verlauf nach rechts unten größer. Da hierbei auch  $b$  zunimmt, steigt also im Verlauf auch die Anzahl der Nullstellen von  $p(a, b; z)$  in der komplexen Zahlenebene. Ebenfalls eingezeichnet ist jeweils der Einheitskreis. Dabei lässt sich beobachten, dass die Nullstellen — wie oben erwähnt — nicht mehr alle auf dem Einheitskreis liegen. Es ist jedoch auch zu erkennen: Mit zunehmendem  $a$  scheinen sich die Nullstellen an den Einheitskreis anzunähern. Hiervon ist nur die Nullstelle  $\zeta_0 = 0$  ausgenommen.

Ein ähnliches Bild liefern die Abbildungen 6, 7, 8 und 9. Diese stellen die Nullstellen von  $p(a, b; z)$  für die  $a$ -Werte 3, 4, 5 und 7 für jeweils sechs ausgewählte  $b$ -Werte dar. Die  $b$ -Werte — und damit die Anzahl der Nullstellen — nehmen erneut von der Teilabbildung links oben im Verlauf zur Teilabbildung nach rechts unten zu. Auch hier enthalten alle Abbildungen den Einheitskreis. Die Beobachtung dazu ist analog: Die Nullstellen liegen zwar nicht mehr auf dem Einheitskreis, mit größer werdendem  $b$  nähern sich die Nullstellen jedoch mit Ausnahme der Nullstelle  $\zeta_0 = 0$  zunehmend dem Einheitskreis an. Halten wir diese Beobachtungen also fest.

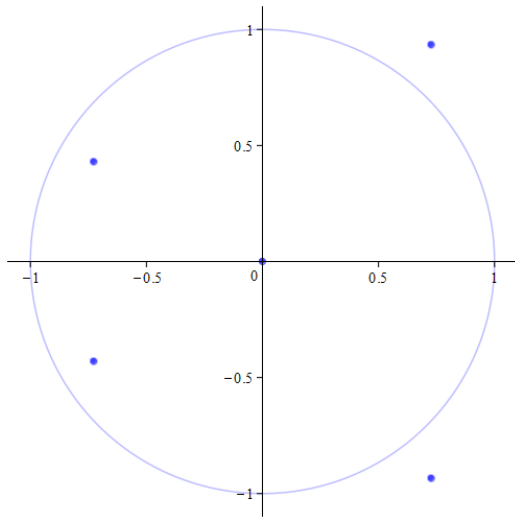
### **Vermutung 4.3.2.**

- (i) Sei  $a < b$  für alle  $b$  in  $p(a, b; z)$ . Für  $a \rightarrow \infty$  geht der Betrag der Nullstellen  $\zeta_j$  von  $p(a, b; z)$  für  $j = 1, \dots, \deg(p(a, b; z)) - 1$  gegen 1.
- (ii) Gegeben eine positive ganze Zahl  $a$ . Dann gilt: Für zu  $a$  teilerfremde  $b$  mit  $a < b$  und  $b \rightarrow \infty$  geht der Betrag der Nullstellen  $\zeta_j$  von  $p(a, b; z)$  für  $j = 1, \dots, \deg(p(a, b; z)) - 1$  gegen 1.

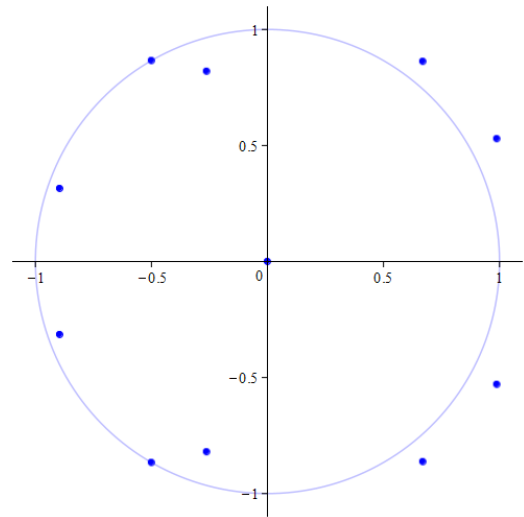
Wir werden den ersten Teil dieser Vermutung zum Teil belegen. Hierfür entwickeln wir eine obere Schranke für den Betrag der Nullstellen von  $p(a, b; z)$  in Abhängigkeit von  $a$ . Das folgende Theorem ist angelehnt an ein Ergebnis von Bairagi et al. [1, S. 289, Theorem 1.5] und liefert uns das entscheidende Werkzeug dafür.

**Theorem 4.3.3.** Für die Nullstellen  $\zeta_j$  von  $p(a, b; z)$  für  $j = 0, \dots, \deg(p(a, b; z)) - 1$  gilt  $|\zeta_j| < \xi$ , wobei  $\xi$  die positive Lösung der Gleichung  $x^a - x^{a-1} - 1 = 0$  mit  $x \in \mathbb{R}$  darstellt.

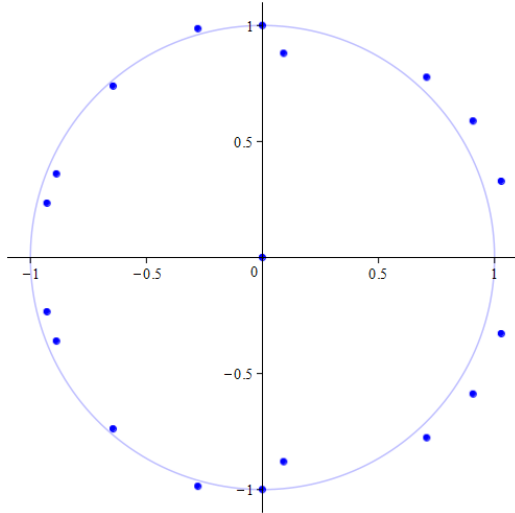
*Beweis.* Wir beobachten zunächst, dass  $a$  genau der Differenz der beiden größten Exponenten aller Monome in  $p(a, b; z)$  entspricht. Diese Aussage kann man zum Beispiel durch Polynomdivision belegen. Betrachten wir  $p(a, b; z)$  in Darstellung (3.16) und nutzen diesen Bruch für die Polynomdivision, dann erhalten wir als führende Monome  $z^{ab-a-b}$  und  $z^{ab-2a-b}$ . Als Differenz der Exponenten ergibt sich wie behauptet genau  $a$ .



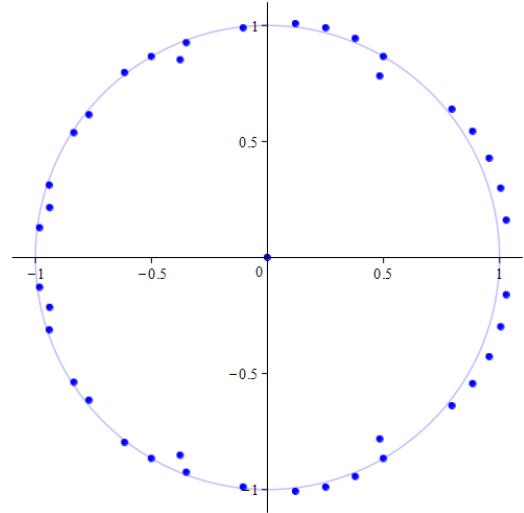
$a = 3$  und  $b = 4$



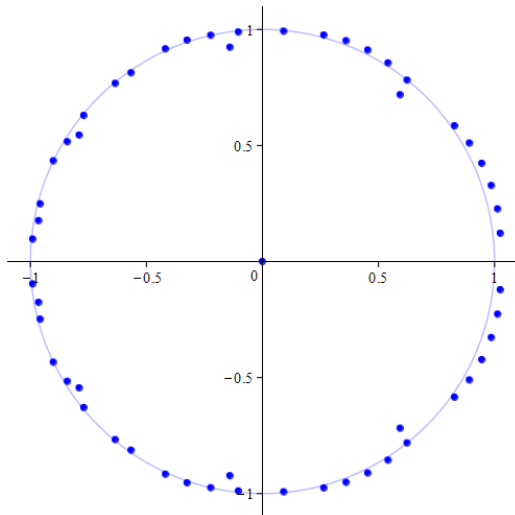
$a = 4$  und  $b = 5$



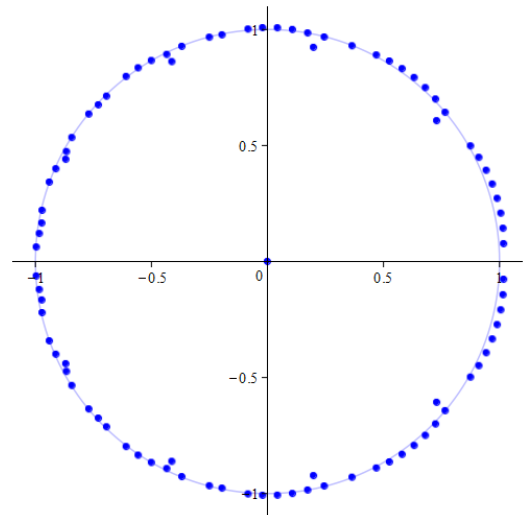
$a = 5$  und  $b = 6$



$a = 7$  und  $b = 8$

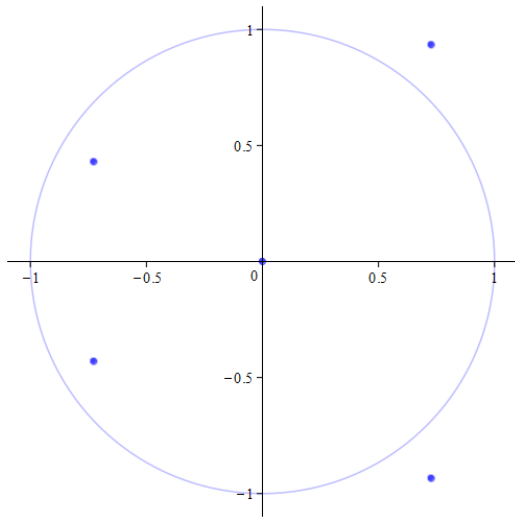


$a = 8$  und  $b = 9$

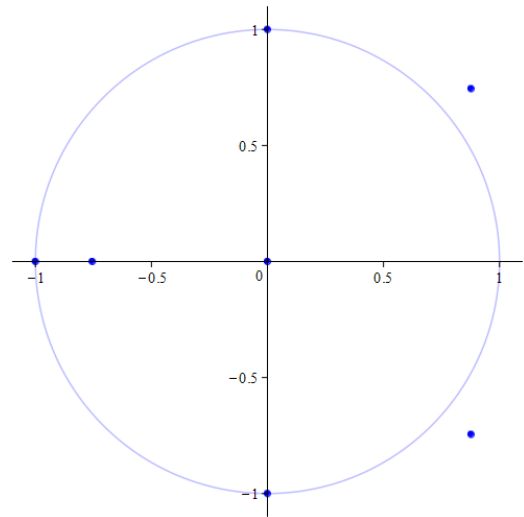


$a = 10$  und  $b = 11$

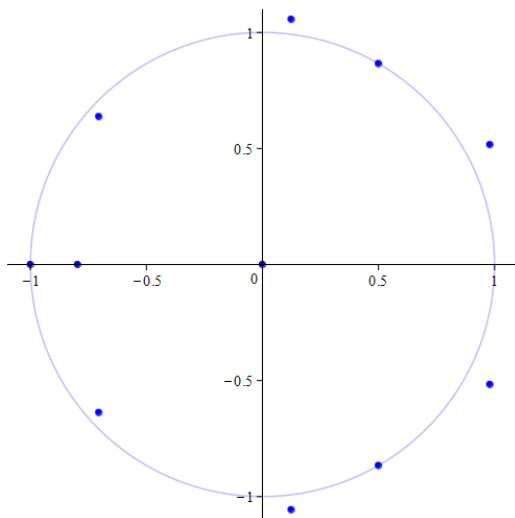
Abbildung 5: Nullstellen von  $p(a, b; z)$  mit  $b - a = 1$ .



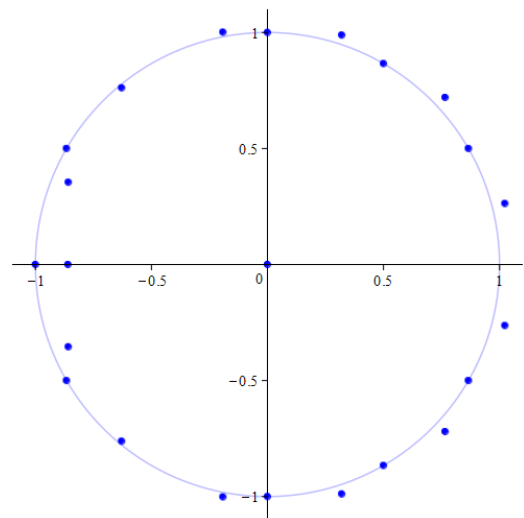
$$b = 4$$



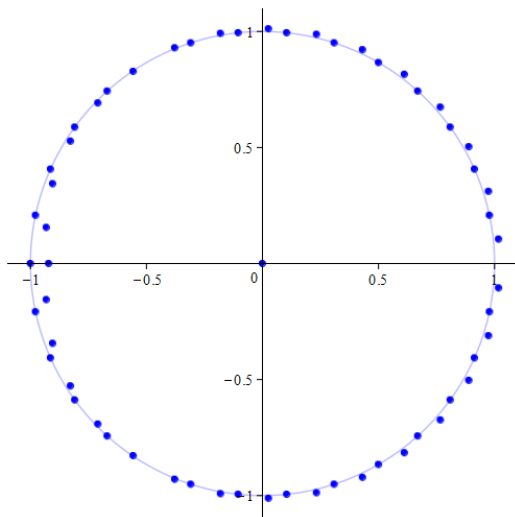
$$b = 5$$



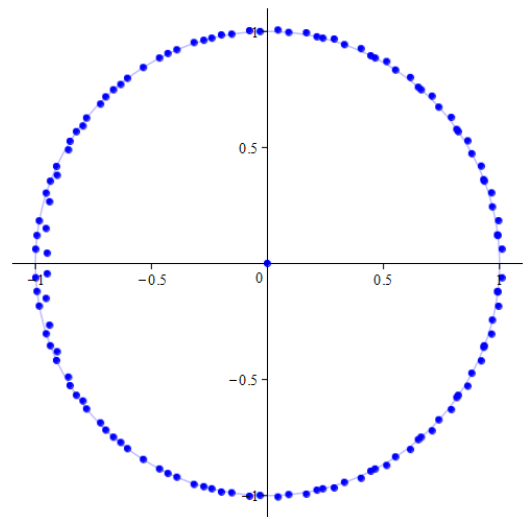
$$b = 7$$



$$b = 13$$

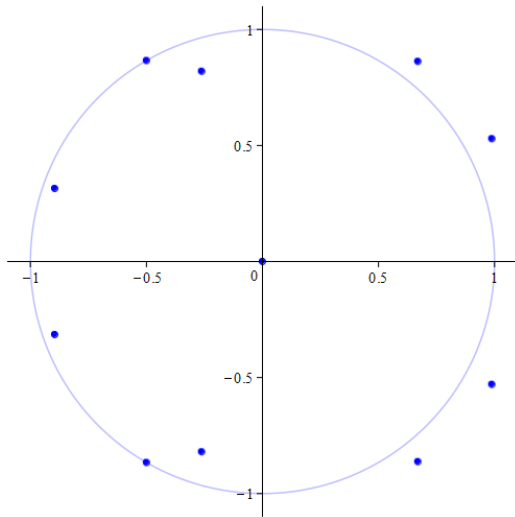


$$b = 31$$

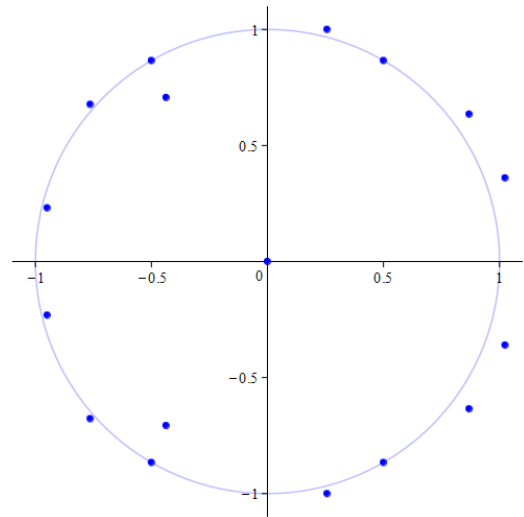


$$b = 52$$

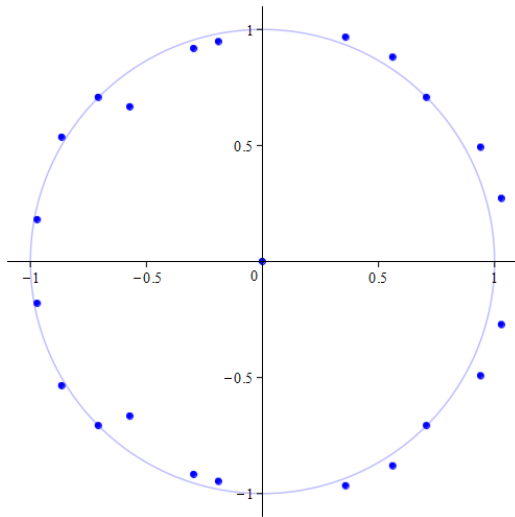
Abbildung 6: Nullstellen von  $p(3, b; z)$ .



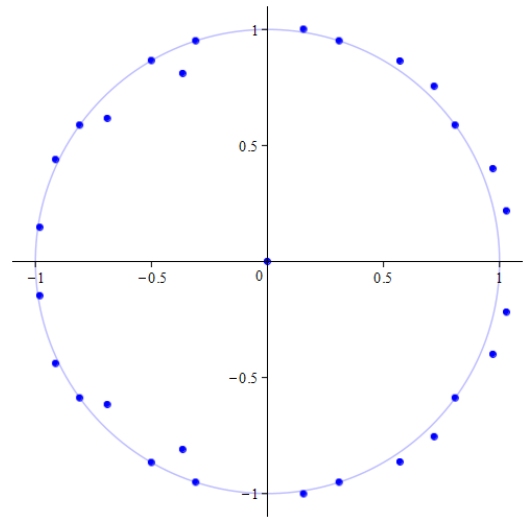
$b = 5$



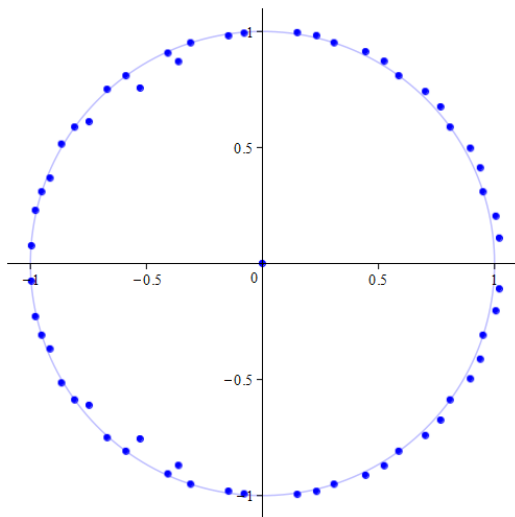
$b = 7$



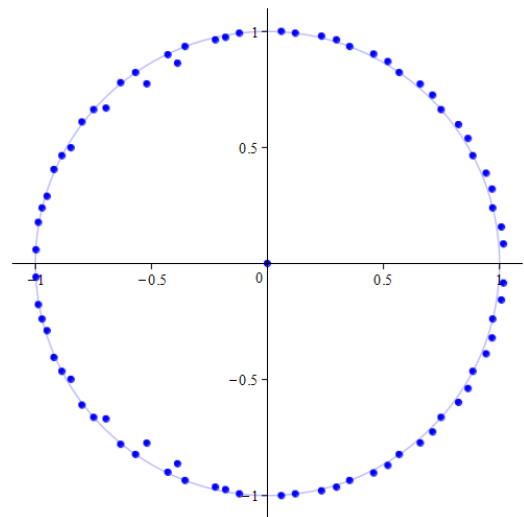
$b = 9$



$b = 11$

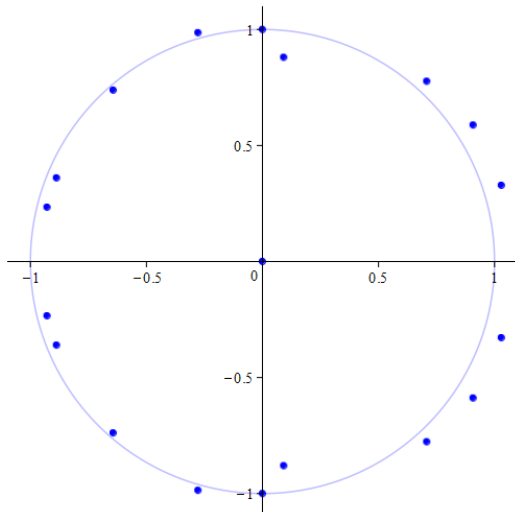


$b = 21$

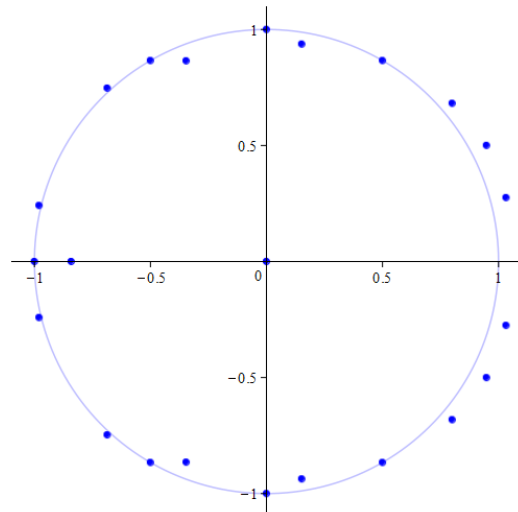


$b = 27$

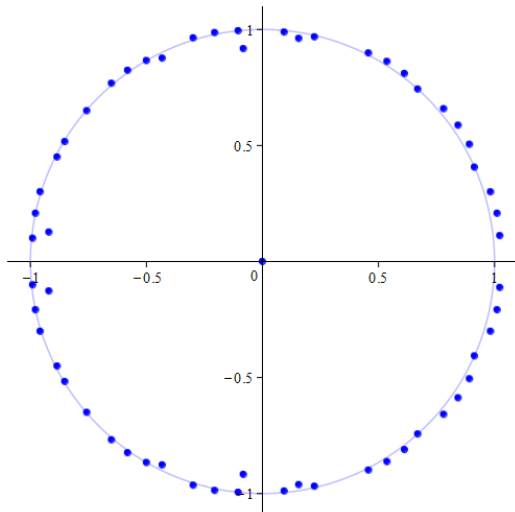
Abbildung 7: Nullstellen von  $p(4, b; z)$ .



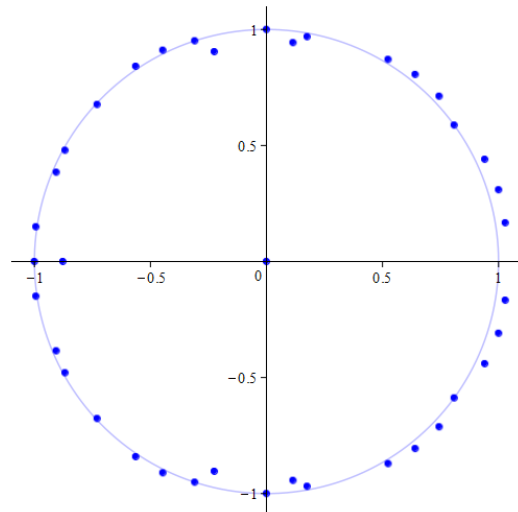
$b = 6$



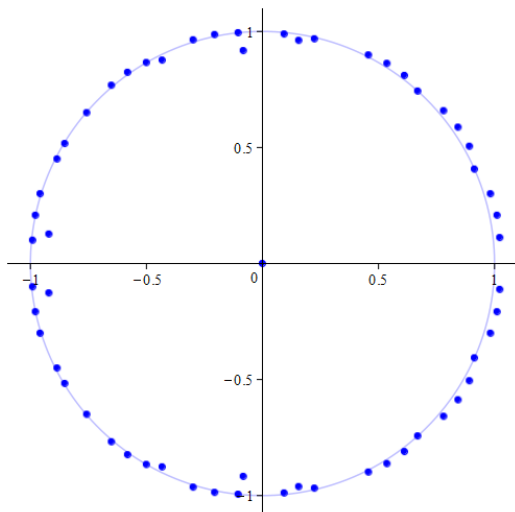
$b = 7$



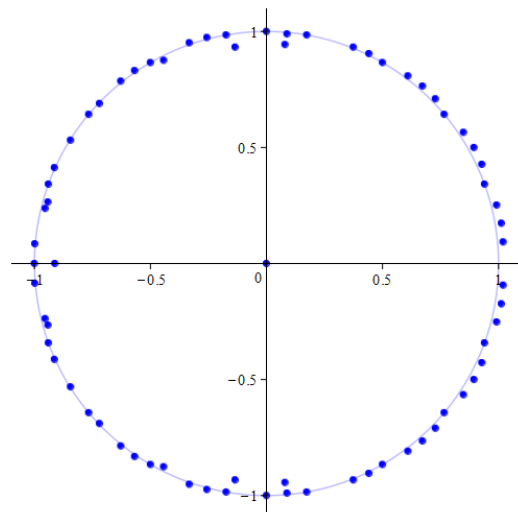
$b = 9$



$b = 11$

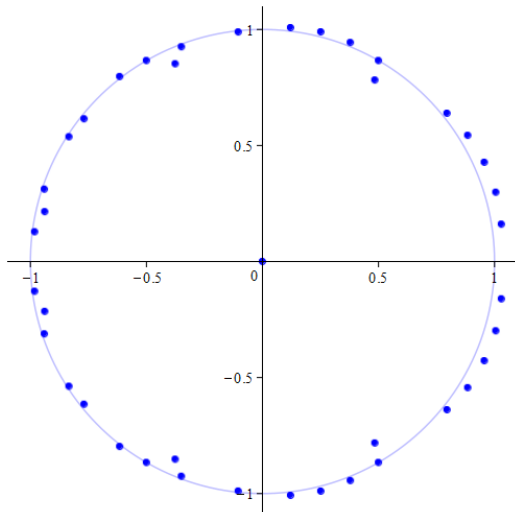


$b = 16$

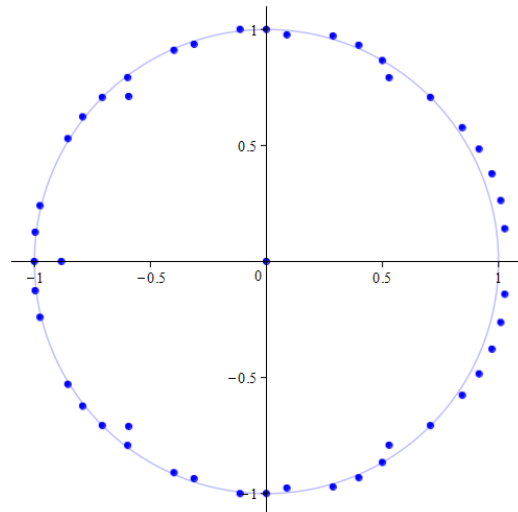


$b = 19$

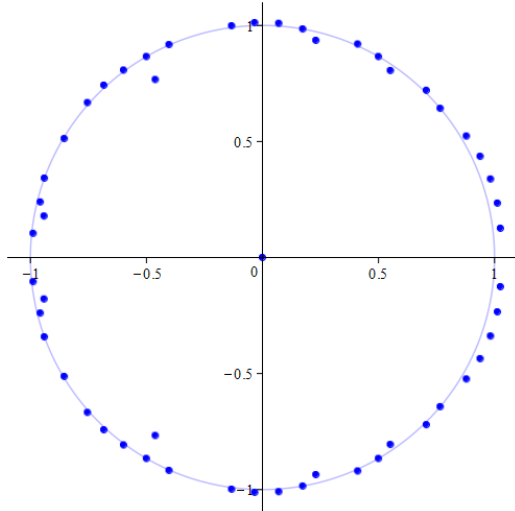
Abbildung 8: Nullstellen von  $p(5, b; z)$ .



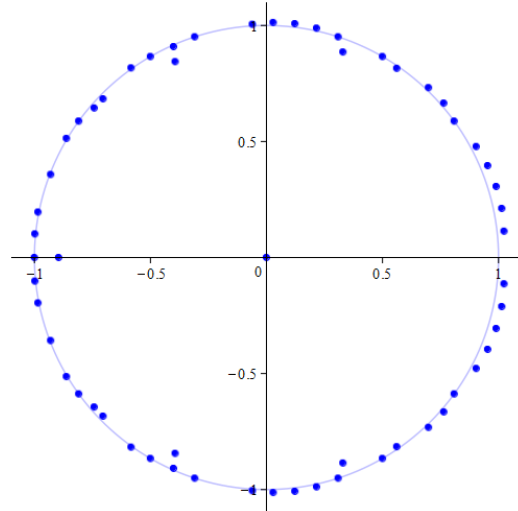
$b = 8$



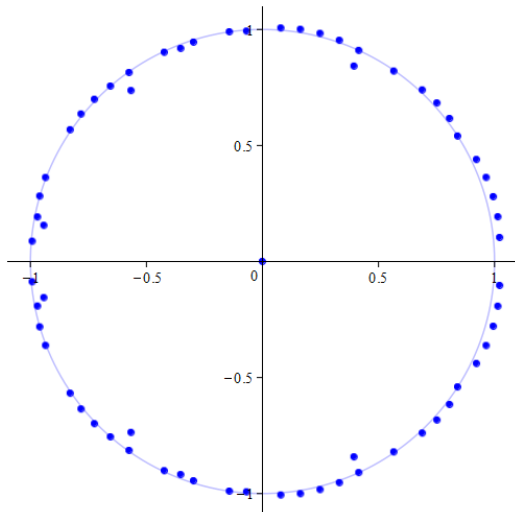
$b = 9$



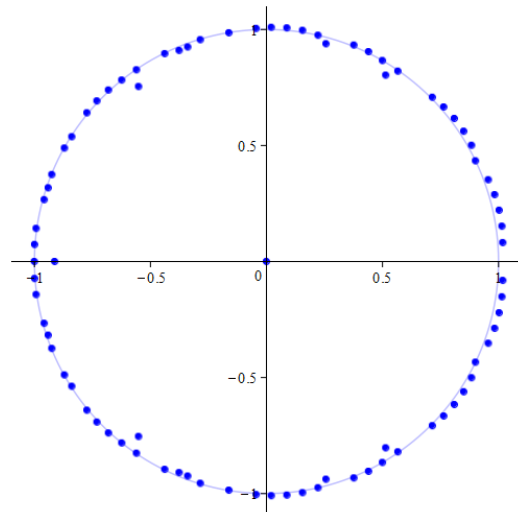
$b = 10$



$b = 11$



$b = 12$



$b = 15$

Abbildung 9: Nullstellen von  $p(7, b; z)$ .



Weiterhin beobachten wir, dass das reelle Polynom  $g(x) = x^a - x^{a-1} - 1$  tatsächlich genau eine positive reelle Nullstelle aufweist. Dies folgt aus der in Satz 2.1.12 zitierten Vorzeichenregel von Descartes, da nur ein Vorzeichenwechsel in der Koeffizientenfolge von  $g$  auftritt. Bezeichnen wir diese Lösung also mit  $\xi$ . Dabei ist offensichtlich, dass  $\xi > 1$  gelten muss.

Für  $|z| \leq 1$  müssen wir also nichts weiter zeigen, da hier immer  $|z| < |\xi|$  gilt. Sei daher  $|z| > 1$ . Dann gilt für  $p(a, b; z)$  mit  $ab - a - b = n$  und  $t_i \in \{0, 1\}$  für  $i = n - a - 1, \dots, 0$ :

$$|p(a, b; z)| = |z^n + z^{n-a} + t_{n-a-1}z^{n-a-1} + \dots + t_1z + t_0| \quad (1)$$

$$\geq |z|^n - |z^{n-a} + t_{n-a-1}z^{n-a-1} + \dots + t_1z + t_0| \quad (2)$$

$$\geq |z|^n - |z|^{n-a} - |t_{n-a-1}| |z|^{n-a-1} - \dots - |t_1| |z| - |t_0| \quad (3)$$

$$= |z|^n - \frac{|z|^{n-a} |z|^n}{|z|^n} - \frac{|t_{n-a-1}| |z|^{n-a-1} |z|^n}{|z|^n} - \dots - \frac{|t_1| |z| |z|^n}{|z|^n} - \frac{|t_0| |z|^n}{|z|^n} \quad (4)$$

$$= |z|^n \left( 1 - \frac{1}{|z|^a} - \frac{|t_{n-a-1}|}{|z|^{a+1}} - \dots - \frac{|t_1|}{|z|^{n-1}} - \frac{|t_0|}{|z|^n} \right). \quad (5)$$

Dabei ergibt sich (1) aus Darstellung (3.14) und der in diesem Beweis eingangs geführten Beobachtung, dass  $a$  der Differenz der Exponenten der führenden Monome entspricht. Als Ergebnis der Anwendung der Dreiecksungleichung erhalten wir dann (2) und (3). Nach Erweitern aller abzuziehenden Koeffizienten und Monome mit  $|z|^n$  und anschließendem Ausklammern und Kürzen kommen wir schließlich zu (4) und (5).

Wir werden nun den Ausdruck in (5) durch Ausnutzen der Eigenschaften der geometrischen Reihe weiter manipulieren und erhalten dadurch

$$\begin{aligned} |p(a, b; z)| &\geq |z|^n \left( 1 - \sum_{k=a}^n \frac{|t_{n-k}|}{|z|^k} \right) \\ &> |z|^n \left( 1 - \sum_{k=a}^{\infty} \frac{1}{|z|^k} \right) \\ &= |z|^n \left( 1 - \frac{|z|^{-a}}{1 - |z|^{-1}} \right) \\ &= |z|^n \left( 1 - \frac{1}{|z|^a - |z|^{a-1}} \right) \\ &= |z|^n \left( \frac{|z|^a - |z|^{a-1} - 1}{|z|^a - |z|^{a-1}} \right). \end{aligned}$$

Wir können sehen, dass der Zähler des Bruchs in der Klammer der letzten Zeile genau  $g(|z|)$  entspricht. Weiterhin stellen wir  $g(1) = -1 < 0$  fest und nutzen die Tatsache aus, dass  $\xi$  die einzige positive Nullstelle von  $g$  ist, um

$$g(x) = x^a - x^{a-1} - 1 \geq 0 \text{ für } x \geq \xi \quad (4.20)$$

festzuhalten. Erinnern wir uns nun an  $\xi > 1$ , so erhalten wir die Aussage  $|p(a, b; z)| > 0$  für  $|z| \geq \xi$  und damit für alle Nullstellen  $\zeta_j$  von  $p(a, b; z)$  die Abschätzung  $|\zeta_j| < \xi$  — und das wollten wir zeigen.  $\square$

Theorem 4.3.3 ist für uns so hilfreich, weil für  $a \rightarrow \infty$  die positive reelle Nullstelle von  $z^a - z^{a-1} - 1$  gegen 1 geht. Wir haben also einen Beweis dafür gefunden, dass die Nullstellen von  $p(a, b; z)$  für  $a \geq 3$ , deren Betrag größer 1 ist, tatsächlich mit zunehmendem  $a$  näher an den Einheitskreis heranrücken.

Dieser Ansatz scheint für den Nachweis unserer Vermutung für Nullstellen mit Betrag kleiner 1 jedoch nicht zielführend. Mit dem folgenden Satz können wir zwar eine untere Schranke für die Nullstellen von  $p(a, b; z)$  finden, diese ist allerdings nicht mehr abhängig von  $a$  und trifft daher keine Aussage über das Verhalten der Nullstellen für  $a \rightarrow \infty$ .

**Satz 4.3.4.** *Gegeben eine Polynomfunktion  $f(z) = \sum_{j=0}^n c_j z^j$ . Ist  $\zeta \neq 0$  eine Nullstelle von  $f$ , so ist  $\zeta^{-1}$  eine Nullstelle des Polynoms  $g(z) = \sum_{j=0}^n c_{n-j} z^j$ .*

*Beweis.* Sei  $\zeta \neq 0$  eine Nullstelle von  $f(z)$ . Dann ist  $\zeta$  auch für  $f(z)z^n = \sum_{j=0}^n c_j z^{n+j}$  eine Nullstelle, also gilt

$$\sum_{j=0}^n c_j \zeta^{n+j} = \sum_{j=0}^n c_j \zeta^j = 0$$

und nach Division mit  $\zeta^n$  erhalten wir

$$\sum_{j=0}^n c_j \zeta^j = \sum_{j=0}^n c_j \zeta^{j-n} = \sum_{j=0}^n c_{n-j} \zeta^{-j} = 0.$$

Demnach ist  $\zeta^{-1}$  eine Nullstelle von  $\sum_{j=0}^n c_{n-j} z^j$ , was wir beweisen wollten.  $\square$

Aus dem Satz folgt unmittelbar, dass man aus einer oberen Nullstellenschranke  $\xi$  für ein Polynom  $f$  eine untere Nullstellenschranke  $\xi^{-1}$  für das Polynom  $g$  ableiten kann, dessen Koeffizienten die umgekehrte Reihenfolge der Koeffizienten von  $f$  aufweisen. Ist nun  $f$  das Polynom, dessen Koeffizienten genau umgekehrt zu denen von  $p(a, b; z)$  sind, dann ist eine obere Nullstellenschranke von  $f$  eine untere Nullstellenschranke von  $p(a, b; z)$ .

Hier ergibt sich jedoch das Problem unserer oberen Schranke: Weil für  $a \geq 3$  die Zahlen 1 und 2 niemals  $(a, b)$ -darstellbar sind, erhalten wir für die Koeffizienten von  $z^2$  und  $z$  in  $p(a, b; z)$  jeweils 1. Nach Abspalten von  $z$  ist der Unterschied der Exponenten der führenden Monome des zu betrachtenden Polynoms  $f$  mit umgekehrten Koeffizienten zu  $p(a, b; z)$  also nicht mehr genau  $a$ , sondern genau 1. Mit Theorem 4.3.3 erhalten wir für die von Null verschiedenen Nullstellen von  $p(a, b; z)$  also nur die feste untere Schranke  $\frac{1}{2}$  — und diese ist unabhängig von  $a$ .

Während unserer Kenntnis nach bisher kein Schrankensatz existiert, der eine untere Schranke in Abhängigkeit von  $a$  definiert, können wir die von  $a$  unabhängige untere Nullstellenschranke noch etwas verbessern. Das zeigt der folgende Satz, den wir angelehnt an Dehmer [8, S. 13, Satz 2.1.3] beweisen.

**Satz 4.3.5.** *Sei  $\zeta$  eine Nullstelle der Polynomfunktion*

$$f(z) = z^n + z^{n-1} + t_{n-2} z^{n-2} \dots + t_1 z + 1$$

*mit  $t_i \in \{0, 1\}$  für  $i = 1, \dots, n-2$ . Dann gilt:  $|\zeta| < \frac{1}{2} (1 + \sqrt{5})$ .*

*Beweis.* Sei  $f$  wie im Satz gegeben. Wir betrachten das Polynom  $h(z) = (1 - z)f(z)$ , dessen von 1 verschiedene Nullstellen mit denen von  $f$  übereinstimmen. Für  $h$  gilt:

$$\begin{aligned} h(z) &= (1 - z)(z^n + z^{n-1} + t_{n-2}z^{n-2} \cdots + t_1z + 1) \\ &= -z^{n+1} + (1 - t_{n-2})z^{n-1} + (t_{n-2} - t_{n-3})z^{n-2} + \cdots + (t_1 - 1)z + 1. \end{aligned}$$

Für eine Nullstelle  $\zeta$  mit Betrag kleiner oder gleich 1 gilt in jedem Fall  $|\zeta| < \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ , denn  $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) > 1$ . Wir können uns im Folgenden also darauf konzentrieren, die Aussage des Satzes für  $|z| > 1$  zu zeigen. Dazu erinnern wir uns an (3) aus dem Beweis von Theorem 4.3.3 und wenden dies auf  $h$  an, dann erhalten wir:

$$\begin{aligned} |h(z)| &\geq |z|^{n+1} - \left( |1 - t_{n-2}| |z|^{n-1} + |t_{n-2} - t_{n-3}| |z|^{n-2} + \cdots + |t_1 - 1| |z| + 1 \right) \\ &= |z|^{n+1} \left( 1 - \left( |1 - t_{n-2}| \frac{1}{|z|^2} + |t_{n-2} - t_{n-3}| \frac{1}{|z|^3} + \cdots + |t_1 - 1| \frac{1}{|z|^n} + \frac{1}{|z|^{n+1}} \right) \right) \\ &\geq |z|^{n+1} \left( 1 - \left( \frac{1}{|z|^2} + \frac{1}{|z|^3} + \cdots + \frac{1}{|z|^n} + \frac{1}{|z|^{n+1}} \right) \right) \\ &> |z|^{n+1} \left( 1 - \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{|z|^j} \right). \end{aligned}$$

Für  $|z| > 1$  ist

$$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{|z|^j} = \frac{1}{1 - \frac{1}{|z|}} - 1 - \frac{1}{|z|} = \frac{1}{|z|(|z| - 1)}$$

und damit ergibt sich insgesamt

$$\begin{aligned} |h(z)| &> |z|^{n+1} \left( 1 - \frac{1}{|z|(|z| - 1)} \right) \\ &= |z|^{n+1} \left( \frac{|z|(|z| - 1) - 1}{|z|(|z| - 1)} \right). \end{aligned}$$

Da  $|z|^{n+1} > 0$  und  $|z|(|z| - 1) > 0$  gelten, folgt unmittelbar, dass  $|h(z)| > 0$ , falls

$$|z|(|z| - 1) - 1 > 0. \quad (4.21)$$

Dies ist jedoch eine quadratische Ungleichung, die wir einfach lösen können, da

$$|z|(|z| - 1) - 1 = |z|^2 - |z| - 1 = 0 \Leftrightarrow |z|_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}).$$

Für  $|z| > \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$  ist Ungleichung (4.21) also erfüllt und daraus können wir folgern, dass Nullstellen von  $h$  mit Betrag größer 1 betragsmäßig kleiner  $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$  sein müssen. Da für eine Nullstelle  $\zeta$  mit Betrag kleiner 1 wie bereits erwähnt ohnehin  $|\zeta| < \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$  gilt, ist der Satz für  $h(z)$  insgesamt bewiesen. Wir hatten  $h$  aber gerade so konstruiert, dass alle Nullstellen von  $f$  auch Nullstellen von  $h$  sind und damit ist der Satz auch für  $f(z)$  gezeigt.  $\square$

Satz 4.3.5 gibt uns eine bessere untere Schranke für die von Null verschiedenen Nullstellen von  $p(a, b; z)$ . In der Tat erhalten wir nach Satz 4.3.4 für eine von Null verschiedene Nullstelle  $\zeta$  die Aussage

$$|\zeta| > \frac{1}{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})} \approx 0,61803398875.$$

Im Ergebnis konnten wir Vermutung 4.3.2 zwar nicht nachweisen, für Teil (i) können wir aber immerhin folgendes Ergebnis festhalten.

**Korollar 4.3.6.** *Sei  $a < b$  für alle  $b$  in  $p(a, b; z)$ . Für  $a \rightarrow \infty$  geht der Betrag der Nullstellen  $\zeta_j$  von  $p(a, b; z)$  für  $j = 1, \dots, \deg(p(a, b; z)) - 1$  und  $|\zeta_j| \geq 1$  gegen 1. Für  $|\zeta_j| < 1$  gilt immer  $|\zeta_j| > \frac{1}{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})}$ .*

Wir konnten also zeigen, dass sich die von Null verschiedenen Nullstellen von  $p(a, b; z)$  in der komplexen Ebene für größer werdende  $a$  alle in einem Band um den Einheitskreis befinden, das außerhalb des Einheitskreises immer enger wird. Für die in Abbildung 5 dargestellten Nullstellen ergibt sich als obere Schranke für  $a = 3$  zum Beispiel etwa 1,466, für  $a = 5$  etwa 1,325 und für  $a = 10$  bereits ungefähr 1,198.

## 5 Fazit

Diese Bachelorarbeit hatte das Ziel, Frobenius-Erzeugendenfunktionen, wie sie zum Beispiel von Bardomero und Beck [2] hergeleitet wurden, näher zu analysieren. Dabei stand die Analyse der Nullstellen im Vordergrund. Nach der Herleitung der Polynomfunktion  $p(a, b; z)$  konnten für die Nullstellen mehrere Aussagen bewiesen werden. So ist  $\zeta_0 = 0$  unabhängig von der Wahl von  $a$  und  $b$  immer eine Nullstelle. Die weiteren Nullstellen von  $p(2, b; z)$  liegen nach Theorem 4.1.2 immer auf dem Einheitskreis. Für  $a = 2$  konnten wir in Theorem 4.2.1 zudem zeigen, dass die von Null verschiedenen Nullstellen von  $p(2, 2b + 1; z)$  und  $p_k(2, b; z)$  abgesehen von Vielfachheiten übereinstimmen. Und für  $a \geq 3$  konnten wir in Korollar 4.3.6 nachweisen, dass sich die von Null verschiedenen Nullstellen von  $p(a, b; z)$  für größer werdende  $a$  alle in einem Band um den Einheitskreis befinden, das außerhalb des Einheitskreises immer enger wird und innerhalb des Einheitskreises die Werte oberhalb von  $\frac{1}{\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})}$  umfasst. Die computergestützten Auswertungen der Nullstellen von  $p(a, a + 1; z)$ ,  $p(3, b; z)$ ,  $p(4, b; z)$ ,  $p(5, b; z)$  und  $p(7, b; z)$  führten zudem zu den in Vermutung 4.3.2 geäußerten Aussagen, dass der Betrag der Nullstellen von  $p(a, b; z)$  für größer werdende  $a$  sowie fixierte  $a$  und größer werdende  $b$  generell gegen 1 geht.

Dass diese Vermutung insgesamt plausibel ist, zeigt auch ein Blick in die Literatur, die sich mit beliebigen Polynomen befasst. Eines der hierbei am häufigsten angeführten Werke ist das von Bharucha-Reid und Sambandham [5], welches für beliebige Polynome mit komplexen Koeffizienten eine deutliche Häufung der Nullstellen in der Nähe des Einheitskreises feststellt.

Nichtsdestotrotz bleibt zu zeigen, dass Vermutung 4.3.2 wahr ist. Theorem 4.3.3 hat gezeigt, dass hierbei insbesondere die Entwicklung weiterer Nullstellenschranken in Abhängigkeit von  $a$  und  $b$  helfen würde. Interessant wäre auch ein neuer Ansatz für die Entwicklung unterer Nullstellenschranken, der nicht nur auf der Entwicklung oberer Schranken für das Polynom mit umgekehrten Koeffizienten basiert.

Wir möchten abschließend noch einmal auf die in der Einleitung geschilderten Fragestellungen zum Guinness World Record von Leah Shutkever zurückkommen. Diese lauteten: Unter der Zusatzbedingung, dass Shutkever alle Nuggets essen muss, die sie bestellt, und dass es nur 9er- und 20er-Packungen gäbe, hätte ihr der Rekord von 46 Nuggets in drei Minuten gelingen können? Wie viele Chicken Nuggets hätte ihr Rekord umfassen können? Und was wäre die größte Anzahl an Nuggets, die Shutkever nicht hätte bestellen können? Die Antworten dazu: Die Zahl 46 ist nicht  $(9, 20)$ -darstellbar. Der Rekord hätte Shutkever unter diesen Bedingungen also nicht gelingen können. Die größte Anzahl von Nuggets, die Shutkever nicht hätte bestellen können, entspricht gerade der Frobenius-Zahl. Diese ist in diesem Fall  $9 \cdot 20 - 9 - 20 = 151$ . Und ihr Rekord hätte unter Nichtbeachtung der Zeit unendlich viele Nuggets umfassen können. Denn wir haben gezeigt, dass jede Zahl ab 152 durch 9 und 20 darstellbar ist. Na dann, guten Appetit!



## Literaturverzeichnis

- [1] S. D. Bairagi u. a. „On the Locations of the Zeros of certain Polynomials“. In: *Publications de l'Institut Mathématique* 99.113 (2016), S. 287–294.
- [2] L. Bardomero und M. Beck. „Frobenius Coin-Exchange Generating Functions“. In: *American Mathematical Monthly* 127 (2020), S. 308–315.
- [3] M. Beck und S. Robins. *Computing the Continuous Discretely. Integer-Point Enumeration in Polyhedra*. 2. überarbeitete. Springer, 2021. URL: <http://math.sfsu.edu/beck/papers/ccdnew.pdf>.
- [4] A. Beutelspacher. *Zahlen, Formeln, Gleichungen. Algebra für Studium und Unterricht*. Springer Spektrum, 2017.
- [5] A. T. Bharucha-Reid und M. Sambandham. *Random Polynomials: Probability and Mathematical Statistics: a Series of Monographs and Textbooks*. Academic Press, 1986.
- [6] A. Brauer. „On a Problem of Partitions“. In: *American Journal of Mathematics* 64.1 (1942), S. 299–312.
- [7] T. C. Brown und P. J. Shiue. „A remark related to the Frobenius problem“. In: *Fibonacci Quart* 31 (1993), S. 32–36.
- [8] M. Dehmer. *Die analytische Theorie der Polynome*. Weißensee Verlag, 2004.
- [9] J. Gallier. *The Frobenius Coin Problem. Upper Bounds on The Frobenius Number*. 2014.
- [10] J. Liesen und V. Mehrmann. *Lineare Algebra. Ein Lehrbuch über die Theorie mit Blick auf die Praxis*. 2. Aufl. Springer Spektrum, 2015.
- [11] P. M. Neumann. „Ferdinand Georg Frobenius“. In: *The Princeton Companion to Mathematics*. T. Gowers, J. Barrow-Green und I. Leader, 2009, S. 783–784.
- [12] L. Pottmeyer. *Diskrete Mathematik: Ein kompakter Einstieg*. 1. Aufl. Springer Spektrum, 2019.
- [13] J. J. Sylvester. „Mathematical questions with their solutions“. In: *Educational Times* 41 (1884), S. 171–178.
- [14] J. J. Sylvester. „On subinvariants, i.e. semi-invariants to binary quantics of an unlimited order“. In: *American Journal of Mathematics* 5 (1882), S. 119–136.
- [15] D. Werner. *Lineare Algebra I und II*. Freie Universität Berlin, 2019.
- [16] T. A. Whitelaw. *An Introduction to Abstract Algebra*. Blackie, 1978.

