Freie Universität Berlin
Fachbereich Mathematik und Informatik
Erstbetreuer: Prof. Matthias Beck
Zweitbetreuer: Dr. Jean-Philippe Labbé

Quasipolinomiale Partitionsfunktionen

Bachelorarbeit

Vorgelegt am: 24. September 2020
Vorgelegt von: Tablu Othmann
Matrikelnummer: 5193733

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe. Alle Ausführungen, die anderen veröffentlichten oder nicht veröffentlichten Schriften wörtlich oder sinngemäß entnommen wurden, habe ich kenntlich gemacht. Die Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Fassung noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegen.

Berlin, 24. September 2020

T. Othmann

Tablu Othmann

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In der vorliegenden Arbeit werden ganzzahlige Partitionen studiert. Eine Partition einer ganzen positiven Zahl n ist eine Zerlegung von n in ganze positive Summanden. Die Summanden werden im folgenden als Teile bezeichnet. Um verschiedene Konzepte einzuführen, beschäftigen wir uns unter anderem mit Eulers Theorem (siehe dafür Kapitel 3), welches besagt, dass die Anzahl von Partitionen von n mit ungeraden Teilen gleich der Anzahl von Partitionen mit paarweise verschiedenen Teilen ist. Diesbezüglich werden unterschiedliche Ansätze diskutiert. Das Theorem wird zunächst über Erzeugendenfunktionen (wir diskutieren diese in Kapitel 2) algebraisch bewiesen, anschließend wird ein Beweisansatz über eine Bijektion beschrieben.
Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt auf den Partitionsfunktionen $p\,(n,m)$, welche die Anzahl an Partitionen einer ganzen Zahl n mit Teilen kleiner gleich m angeben. Das Ziel dieser Arbeit ist es exakte Zählfunktionen $p\,(n,m)$ für kleine m zu entwickeln. Das machen wir für $p\,(n,3)$ in Satz 4.1 und für $p\,(n,4)$ in Satz 4.2. Dabei erhalten wir Quasipolinome (genaue Definition ist in Kapitel 4.2), welche wir über Erzeugendenfunktionen berechnen. Für $p\,(n,5)$ und $p\,(n,6)$ werden in Kapitel 4.4 und 4.5 asymptotische Ergebnisse berechnet.

2 Erzeugendenfunktionen

Erzeugendenfunktionen sind formale Potenzreihen, deren Addition und Multiplikation die von Polynomen widerspiegelt.

Definition 2.1. *Eine Erzeugendenfunktion ist ein Ausdruck der Form*

$$\sum_{n\geq 0} k_n q^n,$$

wobei die k_i reelle Zahlen sind. Sie heißen Koeffizienten der Erzeugendenfunktion. Die Addition und Multiplikation von Erzeugendenfunktionen sind definiert durch

$$\sum_{i\geq 0} a_i q^i + \sum_{i\geq 0} b_i q^i = \sum_{i\geq 0} (a_i + b_i)\, q^i \tag{1}$$

$$\sum_{i\geq 0} a_i q^i \cdot \sum_{i\geq 0} b_i q^i = \sum_{i\geq 0} \left(\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j} \right) q^i. \tag{2}$$

Für weitere Informationen bezüglich Erzeugendenfunktionen siehe [7].

Beispiel 2.1. Die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

ist eine Potenzreihe aus der Analysis, welche einen positiven Konvergenzradius hat. Es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{für} \quad \mid x \mid < 1.$$

Die geometrische Reihe ist ebenfalls eine Erzeugendenfunktion.

In der folgenden Arbeit werden sowohl Erzeugendenfunktionen als auch rationale Funktionen verwendet. Darüber hinaus betrachten wir dabei einen Übergang von Erzeugendenfunktionen zu rationalen Funktionen. Für diesen Wechsel wird zunächst eine mathematische Grundlage geschaffen. Erzeugendenfunktionen leben mit der angegebenen Addition und Multiplikation in (1) und (2) im Ring der formalen Potenzreihen $\mathbb{R}\left[[x]\right]$. Rationale Funktionen hingegen leben in einem anderen Ring, $\mathbb{R}(x)$, welchen wir aus der Analysis kennen. Unser Ziel ist es, eine Abbildung der Art $\mathbb{R}\left[[x]\right] \longrightarrow \mathbb{R}(x)$ zu definieren. Dafür betrachten wir die Menge

$$\begin{aligned} R := &\{f(x) \in \mathbb{R}\left[[x]\right] : \exists p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x] \text{ mit } q(x) \neq 0 \text{ und } q(x) f(x) = p(x)\} \\ &\subset \mathbb{R}\left[[x]\right] \end{aligned}$$

und die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : \qquad R &\longrightarrow \mathbb{R}(x) \\ f(x) &\mapsto \frac{p(x)}{q(x)}. \end{aligned} \tag{3}$$

Lemma 2.1. *Die Teilmenge $R \subset \mathbb{R}\left[[x]\right]$ beschreibt einen Unterring.*

Beweis. Es gilt die Abgeschlossenheit bezüglich der Addition und Multiplikation zu zeigen. Es sei $f_1(x), f_2(x) \in R$. Dann existieren Polynome $p_1(x), p_2(x), q_1(x)$, $q_2(x)$, sodass

$$q_1(x) f_1(x) = p_1(x) \quad \text{und} \quad q_2(x) f_2(x) = p_2(x).$$

Über äquivalente Umformungen erhalten wir

$$q_1(x) q_2(x) (f_1(x) + f_2(x)) = q_1(x) p_2(x) + q_2(x) p_1(x)$$

und somit ist die Summe $f_1(x) + f_2(x)$ ebenfalls in R.
Betrachte nun die Abgeschlossenheit bezüglich der Multiplikation:
Es seien $f_1(x), f_2(x) \in R$ wie oben. Dann ist

$$q_1(x) q_2(x) f_1(x) f_2(x) = p_1(x) p_2(x)$$

und das Produkt $f_1(x) f_2(x)$ ist in R. So beschreibt $R \subset \mathbb{R}[[x]]$ einen Unterring.

□

Aus dem oben Gezeigtem folgt analog, dass ein Ringhomomorphismus vorliegt.

Lemma 2.2. *Der Ringhomomorphismus φ ist injektiv.*

Beweis. Es sei $f(x) \in R$ beliebig. So gibt es nach Definition Polynome $p(x)$, $q(x) \neq 0$, sodass $q(x) f(x) = p(x)$. Wir betrachten die Abbildung

$$f(x) \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Wir wollen wissen, welche Erzeugendenfunktion auf die Null abbildet, das heißt $p(x) = 0$. Damit ist:

$$\begin{aligned} q(x) f(x) &= 0 \\ f(x) &= 0. \end{aligned}$$

Dies beschreibt die Erzeugendenfunktionen, bei der alle Koeffizienten 0 sind. Somit gilt Injektivität. □

Beispiel 2.2. Wir haben bereits die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ als Erzeugendenfunktion kennengelernt. Es seien $q(x) = 1 - x$ und $p(x) = 1$. Dann zeigt

$$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1,$$

dass $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \in R$ ist, mit $\varphi\left(\sum x^n\right) = \frac{1}{1-x}$.

Wir einigen uns darauf, dass der Monomorphismus zwischen Erzeugendenfunktionen in R und rationalen Funktionen im Folgenden mit Gleichheit gekennzeichnet wird.
Erzeugendenfunktionen sind ein Werkzeug, um Zahlenfolgen zu analysieren. Wir werden sie uns zu Nutze machen, um Partitionen mit bestimmten Bedingungen abzuzählen.

Definition 2.2. *Eine Partition einer ganzen positiven Zahl n ist eine Zerlegung von n in ganze positive Summanden $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_r$:*

$$n = a_1 + a_2 + \cdots + a_r.$$

Die a_i heißen die Teile dieser Partition.

Im Folgenden betrachten wir die Erzeugendenfunktion aller möglichen Partitionen mit einem geraden und einem ungeraden Teil kleiner 7:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3} q^{2i} \cdot \sum_{i=1}^{3} q^{2i-1} &= (q^2 + q^4 + q^6) \cdot (q^1 + q^3 + q^5) \\ &= q^{2+1} + q^{3+2} + q^{5+2} + q^{4+1} + q^{4+3} + q^{5+4} + q^{6+1} + q^{6+3} + q^{6+5} \\ &= q^3 + 2q^5 + 3q^7 + 2q^9 + q^{11}.\end{aligned}$$

So sind in der zweiten Zeile in den Exponenten alle möglichen Partitionen mit einem geraden und einem ungeraden Teil kleiner 7 aufgelistet. Darüber hinaus zeigt der Koeffizient von beispielsweise $2q^5$, dass es zwei Partitionen von 5 mit einem geraden und ungeraden Teil gibt, nämlich $3 + 2$ und $4 + 1$.
Diese Idee wird als Grundlage genutzt, um weitere Partitionen darzustellen. Zuvor werden einige Begrifflichkeiten definiert, die im Verlauf verwendet werden.

Definition 2.3. *Im Folgenden beschreibt $p(n)$ die Anzahl an Partitionen einer ganzen positiven Zahl n. Wir vereinbaren $p(0) := 1$. Weiter wird die Anzahl von Partitionen, die eine Bedingung erfüllen, als $p(n \mid [\text{Bedingung}])$ dargestellt.*

Beispiel 2.3. Wir betrachten $n = 5$. Dann ist $p(5) = 7$, da es sieben Partitionen der Zahl 5 gibt:

$$5, \quad 4+1, \quad 3\text{+}2, \quad 3+1+1, \quad 2+2+1, \quad 2+1+1+1, \quad 1+1+1+1+1.$$

In Berührung mit den Partitionen kam Euler im Jahre 1740, nachdem Philippe Naudé ihm einen Brief schrieb. Darin fragte er Euler, was er über die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten wisse, wie eine positive ganze Zahl m als Summe von n verschiedenen ganzzahligen Summanden ausgedrückt werden könne und wie es wäre, wenn die Summanden nicht paarweise verschieden sein müssen. Dies war ein unbekanntes Problem für Euler, welchem er sich euphorisch widmete.
Als nächstes werden wir uns mit einer von Eulers Erkenntnissen auseinandersetzen, welche wir später als Satz formulieren werden.
Während sich Euler dem beschriebenen Problem wandte, erkannte er einen Zusammenhang zwischen dem Zählen von Partitionen und dem Multiplizieren algebraischer Binomiale. Dies wird nun veranschaulicht. [Kapitel 8 in [4]]

Beispiel 2.4. Sei $S = \{n_1, n_2, n_3\}$ eine endliche Menge von drei positiven ganzen Zahlen. Dann werden alle möglichen Partitionen mit verschiedenen Teilen aus S durch die Erzeugendenfunktion enumeriert

$$\begin{aligned}&(1+q^{n_1})\cdot(1+q^{n_2})\cdot(1+q^{n_3})\\ &= 1+q^{n_1}+q^{n_2}+q^{n_3}+q^{n_1+n_2}+q^{n_1+n_3}+q^{n_2+n_3}+q^{n_1+n_2+n_3}.\end{aligned}$$

Eine Verallgemeinerung der Erzeugendenfunktion mit ausschließlich paarweise verschiedenen Teilen bietet folgendes Lemma.

Lemma 2.3. *Sei $S = \{n_1, n_2, ..., n_r\}$, dann ist*

$$\sum_{n\geq 0} p(n \mid \text{paarweise verschiedene Teile in } S)\cdot q^n = \prod_{i=1}^{r}(1+q^{n_i}) = \prod_{n\in S}(1+q^n).$$

Beweis. Wenn wir das Produkt

$$\prod_{n \in S} (1 + q^n)$$

ausmultiplizieren, dann erhalten wir aus jedem Term entweder eine 1 oder ein q^n im Produkt. Dadurch haben wir im Produkt Exponenten, welche jedes Element in S höchstens einmal enthalten und somit eine Partition mit paarweise verschiedenen Teilen darstellen. Umgekehrt taucht jede solche Partition im ausmultiplizierten Produkt auf. □

Beispiel 2.5. Sei $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\sum_{n \geq 0} p\left(n \mid \text{paarweise verschiedene Teile in } S\right) \cdot q^n = \prod_{i=1}^{5} \left(1 + q^i\right) \\
&= \left(1 + q^1\right)\left(1 + q^2\right)\left(1 + q^3\right)\left(1 + q^4\right)\left(1 + q^5\right) \\
&= 1 + q^1 + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + q^{2+1} + q^{3+1} + q^{4+1} + q^{5+1} + q^{3+2} + q^{4+2} + \cdots \\
&= 1 + q^1 + q^2 + 2q^3 + 2q^4 + 3q^5 + 3q^6 + 3q^7 + 3q^8 + 3q^9 + 3q^{10} + 2q^{11} + \cdots .
\end{aligned}$$

Die letzte Zeile gibt mit $3q^5$ die Auskunft, dass es drei Partitionen für $n = 5$ mit paarweise verschiedenen Teilen gibt, welche man an der vorletzten Zeile ablesen kann, und zwar 5, 4+1 und 3+2.

Auf Grundlage des Lemmas 2.3 werden weitere Funktionen beschrieben. Euler erkannte im folgenden Fall einen Zusammenhang zwischen Partitionen von ganzen Zahlen und algebraischen Erweiterungen. Dieser wurde ihm deutlich, als er die Summenformel für die unendliche geometrische Reihe

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

herleitete. [Kapitel 8 in [4]]
Wir betrachten zunächst $S = \{n_1, n_2, ..., n_r\}$ und die Partitionen, in der die Teile

maximal d mal vorkommen.

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\geq 0} p\left(n \mid \text{Teile in } S \text{ kommen maximal } d \text{ mal vor}\right)\cdot q^n\\
&= \prod_{i=1}^{r}\left(1+q^{n_i}+q^{2n_i}+\cdots+q^{dn_i}\right)\\
&= \prod_{i=1}^{r}\left(\sum_{j=0}^{d}\left(q^{n_i}\right)^j\right)\\
&= \prod_{i=1}^{r}\frac{1-q^{(d+1)n_i}}{1-q^{n_i}}\\
&= \prod_{n\in S}\frac{1-q^{(d+1)n}}{1-q^{n}}.
\end{aligned}$$

Hierbei erkennt man einen Übergang von einer Erzeugendenfunktion zu einer rationalen Funktion, wie in Abbildung (3) beschrieben.
Diese Errungenschaft lässt sich über die unendliche geometrische Reihe verallgemeinern.

Lemma 2.4. *Sei $|q| < 1$ und $S = \{n_1, n_2, ..., n_r\}$, dann wird die Erzeugendenfunktion für Partitionen mit Teilen in S beschrieben durch*

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} p\left(n \mid \text{Teile in } S\right)\cdot q^n &= \prod_{i=1}^{r}\left(1+q^{n_i}+q^{2n_i}+\cdots\right)\\
&= \prod_{i=1}^{r}\frac{1}{1-q^{n_i}}\\
&= \prod_{n\in S}\frac{1}{1-q^{n}}.
\end{aligned}$$

Die Umformungen zeigen hier einen Übergang von einer formalen Potenzreihe zu einer rationalen Funktion. Dies ist an dieser Stelle möglich, da unter analytischer Betrachtung die Erzeugendenfunktion eine Potenzreihe darstellt, in diesem Falle die geometrische Reihe. Die geometrische Reihe wurde bereits in Beispiel 2.2 veranschaulicht. Der Übergang in diesem Lemma wird ebenfalls in Abbildung 3 beschrieben.

Beweis. Im Produkt

$$\prod_{i=1}^{r}\left(\sum_{k_i\geq 0} q^{k_i n_i}\right)$$

hat ein typischer Term die Form

$$q^{k_1 n_1} q^{k_2 n_2} \cdots q^{k_r n_r} = q^{k_1 n_1 + \cdots + k_r n_r} \quad \text{für} \quad k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{N}$$

und der Exponent des rechten Ausdrucks zeigt eine Partition mit Teilen in S. Umgekehrt taucht jede Partition mit Teilen in S im Exponenten auf. □

Beispiel 2.6. Man betrachte $S = \{1, 3, 5\}$. Sei darüber hinaus $|q| < 1$.

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} p\,(n \mid \text{Elemente in } S) \cdot q^n &= \prod_{i=1}^{3} \frac{1}{1-q^{n_i}} \\ &= \frac{1}{(1-q^1)\,(1-q^3)\,(1-q^5)}.\end{aligned}$$

Durch die Bestimmung der Taylorreihe der letzten Zeile erhalten wir

$$1 + q + q^2 + 2q^3 + 2q^4 + 3q^5 + 4q^6 + 4q^7 + \cdots$$

Unter erneuter Betrachtung von q^5 wird anhand der letzten Zeile deutlich, dass es drei Partitionen für $n = 5$ mit ungeraden Teilen gibt, und zwar 5, 3+1+1 und 1+1+1+1+1. Diese kann man jedoch nicht aus der Erzeugendenfunktion ablesen.

3 Der Satz von Euler über Partitionen

Im Folgenden betrachten wir die Beispiele 2.5 und 2.6 im Zusammenhang. Dabei werden wir den bekannten Satz von Euler formulieren, welcher sich über unterschiedliche Wege beweisen lässt. Wir werden sowohl einen algebraischen als auch einen bijektiven Beweisansatz betrachten.

Beispiel 3.1. Die zuvor erlangten Ergebnisse über die Anzahl der Partitionen für $n = 5$ über verschiedene und ungerade Teile finden sich in der Tabelle wieder.

ungerade	verschieden
1+1+1+1+1	4+1
3+1+1	3+2
5	5

Die Tatsache, dass die Anzahl der Partitionen in der linken Tabelle gleich der rechten Tabelle ist, fiel Leonard Euler bereits im 18. Jahrhundert auf und wurde erstmals 1748 von ihm bewiesen [2]. Dabei lässt sich die Aussage auf eine natürliche Zahl n verallgemeinern.

Satz 3.1 (Eulers Theorem)**.** *Jede ganze positive Zahl n hat genauso viele Partitionen aus ungeraden Teilen wie aus verschiedenen:*

$$p\left(n \mid \text{ungerade Teile}\right) = p\left(n \mid \text{paarweise verschiedene Teile}\right).$$

Im Beweis wird die Gleichheit der Erzeugendenfunktionen als rationale Funktionen gezeigt, wobei folgende Erzeugendenfunktionen verwendet werden.

Lemma 3.1. *Man beschreibt die Erzeugendenfunktion, welche Partitionen mit paarweise verschiedenen Teilen zählt mit*

$$\sum_{n\geq 0} p\left(n \mid \text{paarweise verschiedene Teile}\right) \cdot q^n = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + q^n\right)$$

und die Erzeugendenfunktion, welche Partitionen mit ungeraden Teilen zählt, mit

$$\sum_{n\geq 0} p\left(n \mid \text{ungerade Teile}\right) \cdot q^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^{2n-1}}.$$

Der Beweis zu diesem Lemma wird in den Beweisen von Lemma 2.3 und 2.4 beschrieben.

Beweis von Satz 3.1. Es wird die Gleichheit der Erzeugendenfunktionen gezeigt.

Für $\mid q \mid < 1$ gilt

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} p\,(n \mid \text{paarweise verschiedene Teile}) \cdot q^n &= \prod_{n=1}^{\infty} (1+q^n) \\
&= \prod_{n=1}^{\infty} (1+q^n) \cdot \frac{1-q^n}{1-q^n} \\
&= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1-q^{2n}}{1-q^n} \\
&= \frac{\prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n})}{\prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n})\,(1-q^{2n-1})} \\
&= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^{2n-1}} \\
&= \sum_{n\geq 0} p\,(n \mid \text{ungerade Teile}) \cdot q^n .
\end{aligned}
$$

Nach Lemma 2.2 ist der Ringhomomorphismus injektiv. So bilden keine zwei verschiedenen Erzeugendenfunktionen auf dieselbe rationale Funktion ab. Somit zeigt die Gleichheit der rationalen Funktionen, dass es sich um dieselben Erzeugendenfunktionen handelt. Da hier folglich die Gleichheit der Erzeugendenfunktionen gezeigt wurde, impliziert dies die Gleichheit der Zählfunktionen und beweist somit Eulers Theorem. □

Es ist darüber hinaus möglich, Eulers Theorem über eine Bijektion zu beweisen. Diese Bijektion wird über einen Algorithmus beschrieben, welcher jede Partition mit ungeraden Teilen in paarweise verschiedene und Partitionen mit paarweise verschiedenen Teilen in ungerade umwandelt. Dabei werden gerade Teile halbiert und umgekehrt ungerade Teile verdoppelt. Dieser Prozess wird wiederholt, bis wir das gewünschte Ergebnis erzielt haben. Der Beweis zu Eulers Theorem über eine Bijektion wird im Folgenden lediglich beschrieben. Für einen Beweis siehe Kapitel 2.3 in [2].

Definition 3.1. *Im Folgenden bezeichne D_n die Menge der Partitionen von n mit paarweise verschiedenen Teilen und U_n die Menge der Partitionen von n mit ungeraden Teilen.*

Wir starten mit U_n und definieren einen Algorithmus, welcher zwei Teile einer Partition desselben Wertes zu einem Teil der doppelten Größe verschmilzt. Dies wird wiederholt, bis kein Teil mehr als einmal vorkommt. Dieser Fall tritt spätestens dann ein, wenn es nur noch einen Teil gibt.
Es sei $n = a_1 + \cdots + a_j + a_{j+1} + \cdots + a_r$ eine Partition in U_n, wobei $a_1 > a_2 > \cdots > a_j = a_{j+1} \geq \cdots \geq a_r$. Dann bleiben a_1 bis a_{j-1} und a_{j+2} bis a_r wie zuvor und a_j und a_{j+1} werden zu einem Teil $2a_j$ addiert. Die Teile werden anschließend der Größe nach geordnet. Dieser Vorgang wird wiederholt, bis alle Teile paarweise verschieden sind.

Beispiel 3.2. Man betrachte folgende Partition von 13 aus ungeraden Teilen unter Verwendung des Algorithmus:

$$\begin{aligned}
&3+3+3+1+1+1+1 \qquad (4)\\
&(3+3)+3+1+1+1+1\\
&6+3+1+1+1+1\\
&6+3+(1+1)+1+1\\
&6+3+2+1+1\\
&6+3+2+(1+1)\\
&6+3+2+2\\
&6+3+(2+2)\\
&6+4+3.
\end{aligned}$$

Wir starten nun bei D_n und betrachten einen Algorithmus, welcher jeden geraden Teil einer Partition in zwei Teile gleichen Wertes teilt. Dieser Vorgang wird wiederholt, bis alle Teile ungerade sind. Dies trifft spätestens dann ein, wenn alle Teile gleich 1 sind.
Es sei $n = a_1 + \cdots + a_r$ eine Partition in D_n und sei a_j der größte gerade Teil. Dann bleiben a_1 bis a_{j-1} und a_{j+1} bis a_r wie zuvor und a_j wird in zwei Teile gleichen Wertes $\frac{a_j}{2}$ geteilt. Die Teile werden anschließend der Größe nach geordnet. Dieser Vorgang wird wiederholt, bis alle Teile ungerade sind.

Beispiel 3.3. Man betrachte, wie in Beispiel 3.2, eine Partition von 13 aus paarweise verschiedenen Teilen unter Verwendung des Algorithmus:

$$\begin{aligned}
&6+4+3\\
&(3+3)+4+3\\
&4+3+3+3\\
&(2+2)+3+3+3\\
&3+3+3+2+2\\
&3+3+3+(1+1)+2\\
&3+3+3+2+1+1\\
&3+3+3+(1+1)+1+1\\
&3+3+3+1+1+1+1. \qquad (5)
\end{aligned}$$

Es wird ersichtlich, dass das gezeigte Beispiel dem Beispiel 3.2 entspricht, wenn man es von unten nach oben liest. Zeile (4) entspricht somit Zeile (5). Da (4) und (5) übereinstimmen, ergibt die Hintereinanderausführung beider Richtungen in diesem Fall die Identität des Beispiels. Dies gilt, da das Verschmelzen zweier gleicher Teile in einen Teil der doppelten Größe und das Teilen eines Teiles in zwei Teile gleichen Wertes inverse Operationen sind. Dies beschreibt die Bijektion zum Satz von Euler, welcher in diesem Rahmen keinen Beweis im Detail darstellt.

Eulers Arbeit zu Partitionen reicht weiter und beschränkt sich keineswegs auf die in dieser Arbeit beschriebenen Erkenntnisse. Für weitere Inhalte zu Eulers Errungenschaften bezüglich Partitionen siehe Kapitel XVI in [5].

4 Partitionsfunktionen

In Kapitel 2 wurden verschiedene Zählfunktionen mit unterschiedlichen Bedingungen betrachtet. Schon in Lemma 2.4 wurden Partitionen analysiert, welche aus Teilen in S bestehen. Im Folgenden betrachten wir $p\,(n,m)$, welche die Anzahl an Partitionen von n mit Teilen kleiner gleich m angibt. Unter Verwendung der vorigen Notation ergibt sich

$$p\,(n, m) = p\,(n \mid \text{Teile in}\,\{1, \ldots, m\})\,.$$

Ziel dieses Kapitels ist es, Partitionsfunktionen für eine natürliche Zahl n zu finden mit $m \leq 4$. Dabei wird deutlich, dass je größer m, desto aufwendiger wird das Berechnen einer Partitionsfunktion. Um dennoch eine Möglichkeit zur Berechnung von $p\,(n, m)$ für $m > 4$ zu bieten, wird eine Annäherung für $p\,(n, 5)$ und $p\,(n, 6)$ beschrieben. Für weiterführende Informationen siehe auch [1].

4.1 $p\,(n, 1)$ und $p\,(n, 2)$

Betrachten wir zunächst $p\,(n, 1)$. Für eine positive ganze Zahl n gibt es genau eine Partition, bei der alle Teile Einsen sind. Demnach gilt

$$p\,(n, 1) = 1 \quad \text{für alle} \quad n.$$

Unter $p\,(n, 2)$ werden alle Partitionen von n gezählt, welche nur Teile kleiner gleich 2 haben. Dementsprechend ist jede Partition von n eindeutig bestimmt durch die Anzahl der Zweien, die vorkommen. Die restlichen Teile sind Einsen. So gibt es für alle $z \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq z \leq \dfrac{n}{2}$ eine Partition von n mit z Zweien und $n - 2z$ Einsen. Somit ist

$$p\,(n, 2) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 = \begin{cases} \frac{n}{2} + 1, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{n+1}{2}, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases},$$

wobei die untere Gaußklammer $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl kleiner gleich x beschreibt.

Beispiel 4.1. Sei $n = 5$. Dann ist

$$p\,(5, 2) = \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor + 1 = 3$$

$$\text{mit} \quad 1 + 1 + 1 + 1 + 1, \quad 2 + 1 + 1 + 1, \quad 2 + 2 + 1.$$

4.2 $p(n,3)$

Das Finden einer Partitionsfunktion für $m = 3$ ist hingegen etwas aufwendiger.

Definition 4.1. *Eine Funnktion $f(n)$ ist ein Quasipolinom, wenn d Polinome $f_0(n), \ldots, f_{d-1}(n)$ existieren, sodass*

$$f(n) = \begin{cases} f_0(n) & \text{falls } n \equiv 0 \mod d, \\ f_1(n) & \text{falls } n \equiv 1 \mod d, \\ \vdots & \\ f_{d-1}(n) & \text{falls } n \equiv d-1 \mod d, \end{cases}$$

gilt für alle $n \in \mathbb{Z}$. Die Zahl d ist die Periode von f. [3]

In Kapitel 4.4 in [6] findet man weitere Informationen zu den hier besprochenen Quasipolinomen.

Satz 4.1. *Die Partitionsfunktion einer ganzen positiven Zahl n ist*

$$p(n,3) = \frac{6n^2 + 36n}{72} + \begin{cases} 1 & \text{falls } n \equiv 0 \mod 6, \\ \frac{5}{12} & \text{falls } n \equiv 1 \mod 6, \\ \frac{2}{3} & \text{falls } n \equiv 2 \mod 6, \\ \frac{3}{4} & \text{falls } n \equiv 3 \mod 6, \\ \frac{2}{3} & \text{falls } n \equiv 4 \mod 6, \\ \frac{5}{12} & \text{falls } n \equiv 5 \mod 6. \end{cases}$$

Um diesen Satz zu beweisen werden vorab Grundlagen geschaffen, welche im Beweis verwendet werden.

Definition 4.2. *Die Ableitung einer Erzeugendenfunktion in $\mathbb{R}[[x]]$ wird definiert durch die Potenzregel der Differentialrechnung*

$$\left(\sum_{n\geq 0} k_n q^n\right)' = \sum_{n\geq 1} k_n n q^{n-1}.$$

Lemma 4.1. *Das Differenzieren der Erzeugendenfunktionen verträgt sich mit dem zuvor beschriebenen Ringhomomorphismus in 3, das heißt, es gilt*

$$\varphi(f'(x)) = (\varphi(f(x)))'.$$

Beweis. Sei $f(x) \in R$, dann gilt $q(x) \cdot f(x) = p(x)$ für Polynome $p(x), q(x) \neq 0$. Wir definieren $q(x) = \sum_{i=0}^{k} q_i x^i$ und $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$, dann ist nach Definition

$$p(x) = \left(\sum_{i=0}^{k} q_i x^i\right)\left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n\right) = \sum_{\substack{0\leq i\leq k\\ 0\leq n}} q_i a_n x^{i+n}.$$

Wir zeigen nun, dass $q'(x) f(x) + q(x) f'(x) = p'(x)$.

$$\begin{aligned}
q'(x) f(x) + q(x) f'(x) &= \left(\sum_{i=0}^{k} q_i i x^{i-1}\right)\left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n\right) + \left(\sum_{i=0}^{k} q_i x^i\right)\left(\sum_{n\geq 0} a_n n x^{n-1}\right) \\
&= \sum_{\substack{0\leq i\leq k\\ 0\leq n}} q_i a_n i x^{i-1} x^n + \sum_{\substack{0\leq i\leq k\\ 0\leq n}} q_i a_n n x^i x^{n-1} \\
&= \sum_{\substack{0\leq i\leq k\\ 0\leq n}} q_i a_n (i+n) x^{i+n-1} \\
&= p'(x).
\end{aligned}$$

Die vorletzte Zeile entspricht nach Definition 4.2 der Ableitung von $p(x)$.
Da die Produktregel der Differenzialrechnung die Quotientenregel impliziert, ist es damit möglich, $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ aus R zu differenzieren. □

Definition 4.3. *Seien k, n natürliche Zahlen. Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ beschreibt die Anzahl der k-elementigen Untermengen einer n-elementigen Menge und es gilt*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Lemma 4.2. *Sei $m \in \mathbb{N}$. Für die Binomialreihe gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m}{m} q^n = (1-q)^{-m-1}.$$

Beweis. Verwende vollständige Induktion über m. Wir betrachen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m}{m} q^n = (1-q)^{-m-1} \tag{6}$$

mit $m=0$ und erhalten die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = (1-q)^{-1} = \frac{1}{1-q}.$$

Wenn wir die letzte Zeile differenzieren, ergibt sich

$$\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{1} q^n = (1-q)^{-2},$$

was (6) für $m=1$ entspricht.
Es gelte für ein beliebiges, aber festes $m \geq 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m-1}{m-1} q^n = (1-q)^{-m}.$$

Wir differenzieren nun beide Ausdrücke der Gleichung und erhalten

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+m-1}{m-1} nq^{n-1} &= m(1-q)^{-m-1} \\
\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m}{m-1} (n+1)\, q^n &= m(1-q)^{-m-1} \\
\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m}{m} q^n &= (1-q)^{-m-1},
\end{aligned}$$

was den Induktionsschritt beweist. □

Es ist nun möglich, den Satz 4.1 zu beweisen.

Beweis. Nach Lemma 2.4 gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n,m)\, q^n = \frac{1}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^m)}$$

und für $m=3$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n,3)\, q^n = \frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}.$$

Unter Verwendung der Partialbruchzerlegung wird der rechte Ausdruck umgeformt.

$$\frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} = \frac{A}{(1-q)^3} + \frac{B}{(1-q)^2} + \frac{C}{1-q} + \frac{D}{1+q} + \frac{Eq+F}{(1+q+q^2)}.$$

Durch das Erweitern der Brüche auf einen gemeinsamen Nenner und das Ausklammern der Potenzen von q erhalten wir folgende Gleichungen

$$\begin{aligned}
A+B+C+D+F &= 1\\
2A+B-2D+E-2F &= 0\\
2A-C+D-2E &= 0\\
A-B-C-D+2F &= 0\\
-B+2D+2E-F &= 0\\
C-D-E &= 0.
\end{aligned}$$

Das Lösen des linearen Gleichungssystems liefert die Werte für die Variablen

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} p(n,3)\, q^n =& \frac{\frac{1}{6}}{(1-q)^3} + \frac{\frac{1}{4}}{(1-q)^2} + \frac{\frac{17}{72}}{1-q} + \frac{\frac{1}{8}}{1+q} + \frac{\frac{1}{9}(q+2)}{(1+q+q^2)}\\
=& \frac{\frac{17}{72}q^2 - \frac{13}{18}q + \frac{47}{72}}{(1-q)^3} + \frac{\frac{1}{8} - \frac{1}{8}q}{1-q^2} + \frac{\frac{2}{9} - \frac{1}{9}q - \frac{1}{9}q^2}{1-q^3}\\
=& (1-q)^{-3}\left(\frac{17}{72}q^2 - \frac{13}{18}q + \frac{47}{72}\right) + \left(1-q^2\right)^{-1}\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}q\right)\\
&+ \left(1-q^3\right)^{-1}\left(\frac{2}{9} - \frac{1}{9}q - \frac{1}{9}q^2\right)
\end{aligned}$$

Unter Anwendung der Binomialreihe aus Lemma 4.2 ergibt sich

$$\begin{aligned}
=& \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{2}q^n\left(\frac{17}{72}q^2 - \frac{13}{18}q + \frac{47}{72}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n}\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}q\right)\\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} q^{3n}\left(\frac{2}{9} - \frac{1}{9}q - \frac{1}{9}q^2\right)\\
=& \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{2}\frac{17}{72}q^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{2}\frac{13}{18}q^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{2}\frac{47}{72}q^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{8}q^{2n}\\
&- \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{8}q^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{9}q^{3n} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{9}q^{3n+1} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{9}q^{3n+2}.
\end{aligned}$$

Wir wollen nun die Koeffizienten der Erzeugendenfunktionen gesondert betrachten. Dafür bringen wir die Summanden jeweils durch Indexverschiebung auf einen Ausdruck der Form $\sum_{n=0}^{\infty} p(n,3)\, q^n$ und schreiben dann die Koeffizienten auf. So erhalten wir

$$p(n,3) = \frac{17}{72}\binom{n}{2} - \frac{13}{18}\binom{n+1}{2} + \frac{47}{72}\binom{n+2}{2} + \begin{cases} \frac{2}{9}+\frac{1}{8} & \text{falls } n \equiv 0 \bmod 6, \\ -\frac{1}{9}-\frac{1}{8} & \text{falls } n \equiv 1 \bmod 6, \\ -\frac{1}{9}+\frac{1}{8} & \text{falls } n \equiv 2 \bmod 6, \\ \frac{2}{9}-\frac{1}{8} & \text{falls } n \equiv 3 \bmod 6, \\ -\frac{1}{9}+\frac{1}{8} & \text{falls } n \equiv 4 \bmod 6, \\ -\frac{1}{9}-\frac{1}{8} & \text{falls } n \equiv 5 \bmod 6, \end{cases}$$

und das entspricht

$$p(n,3) = \frac{6n^2+36n}{72} + \begin{cases} 1 & \text{falls } n \equiv 0 \bmod 6, \\ \frac{5}{12} & \text{falls } n \equiv 1 \bmod 6, \\ \frac{2}{3} & \text{falls } n \equiv 2 \bmod 6, \\ \frac{3}{4} & \text{falls } n \equiv 3 \bmod 6, \\ \frac{2}{3} & \text{falls } n \equiv 4 \bmod 6, \\ \frac{5}{12} & \text{falls } n \equiv 5 \bmod 6. \end{cases}$$

Dies beschreibt eine periodische Funktion mit Periode 6. □

Beispiel 4.2. Sei wieder $n = 5$. Dann ist

$$p(5,3) = \frac{6 \cdot 5^2 + 36 \cdot 5}{72} + \frac{5}{12} = 5$$

$$\text{mit} \quad 1+1+1+1+1, \quad 2+1+1+1, \quad 2+2+1, \quad 3+1+1, \quad 3+2.$$

4.3 $p(n,4)$

Das Finden einer Partitionsfunktion wird für jedes weitere m in $p(n,m)$ schwieriger. Um dem einen Vorgeschmack zu geben, betrachten wir nun die Partitionsfunktion für $m = 4$.

Satz 4.2. *Für eine ganze positive Zahl n gilt*

$$p\,(n,4) = \frac{2n^3+30n^2}{288} + \begin{cases} \frac{n+2}{2} & \textit{falls } n \equiv 0 \ \textit{mod 12}, \\ \frac{63n+65}{144} & \textit{falls } n \equiv 1 \ \textit{mod 12}, \\ \frac{18n+19}{36} & \textit{falls } n \equiv 2 \ \textit{mod 12}, \\ \frac{7n+9}{16} & \textit{falls } n \equiv 3 \ \textit{mod 12}, \\ \frac{9n+16}{18} & \textit{falls } n \equiv 4 \ \textit{mod 12}, \\ \frac{63n+49}{144} & \textit{falls } n \equiv 5 \ \textit{mod 12}, \\ \frac{2n+3}{4} & \textit{falls } n \equiv 6 \ \textit{mod 12}, \\ \frac{63n+65}{144} & \textit{falls } n \equiv 7 \ \textit{mod 12}, \\ \frac{9n+14}{18} & \textit{falls } n \equiv 8 \ \textit{mod 12}, \\ \frac{7n+9}{16} & \textit{falls } n \equiv 9 \ \textit{mod 12}, \\ \frac{18n+23}{36} & \textit{falls } n \equiv 10 \ \textit{mod 12}, \\ \frac{63n+49}{144} & \textit{falls } n \equiv 11 \ \textit{mod 12}. \end{cases}$$

Beweis. Nach Lemma 2.4 gilt für $m = 4$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p\,(n,4)\, q^n = \frac{1}{(1-q)\,(1-q^2)\,(1-q^3)\,(1-q^4)}.$$

Unter Verwendung der Partialbruchzerlegung wird der rechte Ausdruck umgeformt.

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-q)\,(1-q^2)\,(1-q^3)\,(1-q^4)} =& \frac{1}{(1-q)^4\,(1+q)^2\,(1+q+q^2)\,(1+q^2)} \\ =& \frac{A}{(1-q)^4} + \frac{B}{(1-q)^3} + \frac{C}{(1-q)^2} + \frac{D}{1-q} + \\ & \frac{E}{(1+q)^2} + \frac{F}{1+q} + \frac{Gq+H}{1+q+q^2} + \frac{Iq+J}{1+q^2}. \end{aligned}$$

Durch das Erweitern der Brüche auf einen gemeinsamen Nenner und das Ausklammern der Potenzen von q erhalten wir folgende Gleichungen

$$\begin{aligned}
A+B+C+D+E+F+H+J&=1\\
3A+2B+C-3E-2F+G-2H+I-J&=0\\
5A+2B-D+4E+F-2G-I-2J&=0\\
6A+B-C-D-5E-F+2H-2I+J&=0\\
5A-B-2C-D+6E+F+2G-2H+I+2J&=0\\
3A-2B-C+D-5E+F-2G+2H+2I+J&=0\\
A-2B+D+4E-F+2G+I-2J&=0\\
-B+C+D-3E+F-2H-2I-J&=0\\
C+E-2F-2G+H-I+J&=0\\
-D+F+G+I&=0.
\end{aligned}$$

Das Lösen des linearen Gleichungssystems liefert die Werte für die Variablen

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} p\left(n,4\right)q^n =&\frac{\frac{1}{24}}{\left(1-q\right)^4}+\frac{\frac{1}{8}}{\left(1-q\right)^3}+\frac{\frac{59}{288}}{\left(1-q\right)^2}+\frac{\frac{17}{72}}{1-q}+\\
&\frac{\frac{1}{32}}{\left(1+q\right)^2}+\frac{\frac{1}{8}}{1+q}+\frac{\frac{1}{9}\left(1+q\right)}{1+q+q^2}+\frac{\frac{1}{8}}{1+q^2}\\
=&\left(1-q\right)^{-4}\left(-\frac{17}{72}q^3+\frac{263}{288}q^2-\frac{179}{144}q+\frac{175}{288}\right)\\
&+\left(1-q^2\right)^{-2}\left(\frac{1}{8}q^3-\frac{3}{32}q^2-\frac{3}{16}q+\frac{5}{32}\right)\\
&+\left(1-q^3\right)^{-1}\left(-\frac{1}{9}q^2+\frac{1}{9}\right)+\left(1-q^4\right)^{-1}\left(-\frac{1}{8}q^2+\frac{1}{8}\right).
\end{aligned}$$

Unter Anwendung der Binomialreihe ergibt sich

$$\begin{aligned}
=&\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+3}{3}q^n\left(-\frac{17}{72}q^3+\frac{263}{288}q^2-\frac{179}{144}q+\frac{175}{288}\right)+\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+1}{1}q^{2n}\\
&\left(\frac{1}{8}q^3-\frac{3}{32}q^2-\frac{3}{16}q+\frac{5}{32}\right)+\sum_{n=0}^{\infty}q^{3n}\left(-\frac{1}{9}q^2+\frac{1}{9}\right)\\
&+\sum_{n=0}^{\infty}q^{4n}\left(-\frac{1}{8}q^2+\frac{1}{8}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+3}{3} \left(-\frac{17}{72}\right) q^{n+3} + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+3}{3} \frac{263}{288} q^{n+2} \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+3}{3} \left(-\frac{179}{144}\right) q^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+3}{3} \frac{175}{288} q^{n} \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{1} \frac{1}{8} q^{2n+3} + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{1} \left(-\frac{3}{32}\right) q^{2n+2} \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{1} \left(-\frac{3}{16}\right) q^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{1} \frac{5}{32} q^{2n} \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{9}\right) q^{3n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{9} q^{3n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{8}\right) q^{4n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{8} q^{4n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{3} \left(-\frac{17}{72}\right) q^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{3} \frac{263}{288} q^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{3} \left(-\frac{179}{144}\right) q^{n} \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+3}{3} \frac{175}{288} q^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{n+3}{16}\right) q^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n+5}{32}\right) q^{2n} \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{9}\right) q^{3n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{9} q^{3n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{8}\right) q^{4n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{8} q^{4n}.
\end{aligned}
$$

Unter Betrachtung der Koeffizienten der Erzeugendenfunktionen ergibt sich

$$
p\left(n,4\right) = \frac{2n^3+30n^2}{288} + \begin{cases}
\frac{n+2}{2} & \text{falls } n \equiv 0 \bmod 12, \\
\frac{63n+65}{144} & \text{falls } n \equiv 1 \bmod 12, \\
\frac{18n+19}{36} & \text{falls } n \equiv 2 \bmod 12, \\
\frac{7n+9}{16} & \text{falls } n \equiv 3 \bmod 12, \\
\frac{9n+16}{18} & \text{falls } n \equiv 4 \bmod 12, \\
\frac{63n+49}{144} & \text{falls } n \equiv 5 \bmod 12, \\
\frac{2n+3}{4} & \text{falls } n \equiv 6 \bmod 12, \\
\frac{63n+65}{144} & \text{falls } n \equiv 7 \bmod 12, \\
\frac{9n+14}{18} & \text{falls } n \equiv 8 \bmod 12, \\
\frac{7n+9}{16} & \text{falls } n \equiv 9 \bmod 12, \\
\frac{18n+23}{36} & \text{falls } n \equiv 10 \bmod 12, \\
\frac{63n+49}{144} & \text{falls } n \equiv 11 \bmod 12,
\end{cases}
$$

eine periodische Funktion mit Periode 12. $\square$

Beispiel 4.3. Sei n=5.

$$p\left(5,4\right)=\frac{2\cdot 5^3+30\cdot 5^2}{288}+\frac{63\cdot 5+49}{144}=6$$

mit $\quad 1+1+1+1+1, \quad 2+1+1+1, \quad 2+2+1, \quad 3+1+1, \quad 3+2, \quad 4+1.$

4.4 $p\left(n,5\right)$

In den vorigen Unterkapiteln ist deutlich geworden, dass je größer m, desto aufwendiger ist die Berechnung von $p\left(n,m\right)$. Da die Berechnung von $p\left(n,5\right)$ zu große Ausmaße annehmen würde, wird im Folgenden eine Annäherung bestimmt, dessen Berechnung deutlich effizienter ist.
Dazu betrachten wir zunächst die Pole von

$$\sum_{n=0}^{\infty}p\left(n,5\right)q^n=\frac{1}{\left(1-q\right)\left(1-q^2\right)\left(1-q^3\right)\left(1-q^4\right)\left(1-q^5\right)}$$

mit ihrer Vielfachheit. Diese werden in der folgenden Tabelle dargestellt:

Pol	Vielfachheit
1	5-fach
-1	2-fach
i	1-fach
$-i$	1-fach
$e^{\frac{2\pi ik}{5}},\ 1\leq k\leq 4$	1-fach
$e^{\frac{2\pi i}{3}}, e^{\frac{4\pi i}{3}}$	1-fach

Jeder dieser Pole liefert einen Beitrag zur Bestimmung von $p\left(n,5\right)$. Dabei spielt die Vielfachheit eine wichtige Rolle. Ein Pol mit einer Vielfachheit m gibt uns ein Polynom vom Grad $m-1$. Da die Betrachtung aller Pole in einer Partialbruchzerlegung, wie wir es zuvor taten, zu umfangreich ist, arbeiten wir nun mit der Laurentreihe und entwickeln $\sum_{n=0}^{\infty}p\left(n,5\right)q^n$ um den Punkt 1, da dieser Pol mit der Vielfachheit 5 ein Polynom vom Grad 4 liefert, was in diesem Fall die größte Vielfachheit darstellt. Die Entwicklung von $\sum_{n=0}^{\infty} p\,(n,5)\,q^n$ um den Punkt 1 gibt uns

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{120\,(1-q)^5}+\frac{1}{24\,(1-q)^4}+\frac{31}{288\,(1-q)^3}+\frac{3}{16\,(1-q)^2}+\frac{20831}{86400\,(1-q)}\\
&=\left(\frac{20831}{86400}q^4-\frac{24881}{21600}q^3+\frac{30481}{14400}q^2-\frac{38531}{21600}q+\frac{50651}{86400}\right)(1-q)^{-5}.
\end{aligned}$$

Unter Anwendung der Binomialreihe ergibt sich

$$\begin{aligned}
&=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+4}{4}q^n\left(\frac{20831}{86400}q^4-\frac{24881}{21600}q^3+\frac{30481}{14400}q^2-\frac{38531}{21600}q+\frac{50651}{86400}\right)\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+4}{4}\frac{20831}{86400}q^{n+4}-\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+4}{4}\frac{24881}{21600}q^{n+3}+\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+4}{4}\frac{30481}{14400}q^{n+2}\\
&\quad-\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+4}{4}\frac{38531}{21600}q^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+4}{4}\frac{50651}{86400}q^{n}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{4}\frac{20831}{86400}q^{n}-\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+1}{4}\frac{24881}{21600}q^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{4}\frac{30481}{14400}q^{n}\\
&\quad-\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+3}{4}\frac{38531}{21600}q^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+4}{4}\frac{50651}{86400}q^{n}.
\end{aligned}$$

Betrachten wir nun die Koeffizienten der Erzeugendenfunktionen, so erhalten wir die Annäherung

$$p\,(n,5)\approx\frac{1}{2880}n^4+\frac{1}{96}n^3+\frac{31}{288}n^2+\frac{85}{192}n+\frac{50651}{86400},$$

die von $p\,(n,5)$ nur in den letzten zwei Termen abweicht, da die restlichen Pole Polynome vom Grad maximal 1 liefern.

Über die Taylorentwicklung um den Punkt 0 von

$$\prod_{n=1}^{5}\frac{1}{1-q^n}$$

aus Lemma 2.4 erhalten wir, durch die Koeffizienten von q^5, q^6, q^7 und q^{100}, die exakten Ergebnisse

$$1+q+2q^2+3q^3+5q^4+7q^5+10q^6+13q^7+18q^8+23q^9+\cdots+46262q^{100}+\cdots.$$

Beispiel 4.4. Wir betrachten nun $n = 5, 6, 7$ und 100.

$$p(5,5) \approx \frac{1}{2880}5^4 + \frac{1}{96}5^3 + \frac{31}{288}5^2 + \frac{85}{192}5 + \frac{50651}{86400} = \frac{605651}{86400} \approx 7,009,$$

wobei $p(5,5) = 7$ ist.

$$p(6,5) \approx \frac{1}{2880}6^4 + \frac{1}{96}6^3 + \frac{31}{288}6^2 + \frac{85}{192}6 + \frac{50651}{86400} = \frac{848231}{86400} \approx 9,817,$$

wobei $p(6,5) = 10$ ist.

$$p(7,5) \approx \frac{1}{2880}7^4 + \frac{1}{96}7^3 + \frac{31}{288}7^2 + \frac{85}{192}7 + \frac{50651}{86400} = \frac{1154831}{86400} \approx 13,366,$$

wobei $p(7,5) = 13$ ist.

$$\begin{aligned} p(100,5) &\approx \frac{1}{2880}100^4 + \frac{1}{96}100^3 + \frac{31}{288}100^2 + \frac{85}{192}100 + \frac{50651}{86400} = \frac{3996875651}{86400} \\ &\approx 46260,135, \end{aligned}$$

wobei $p(100,5) = 46262$ ist.

Dieses Beispiel zeigt exemplarisch, dass wir eine gute Annäherung mit deutlich geringerem Aufwand bestimmt haben. Auch für größere n erhalten wir mit unserer Approximation gute Ergebnisse.

4.5 $p(n,6)$

Nach dem Erfolg für $p(n,5)$ wollen wir nun auch eine gute Approximation für $p(n,6)$ berechnen. Dazu betrachten wir auch hier die Pole von

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n,6)\, q^n = \frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)(1-q^5)(1-q^6)}$$

mit ihrer Vielfachheit:

Pol	Vielfachheit
1	6-fach
-1	3-fach
i	1-fach
$-i$	1-fach
$e^{\frac{2\pi ik}{5}}, 1 \leq k \leq 4$	1-fach
$e^{\frac{2\pi i}{3}}, e^{\frac{4\pi i}{3}}$	2-fach
$e^{\frac{\pi i}{3}}, e^{\frac{5\pi i}{3}}$	1-fach

Wir betrachten wieder den Pol mit der größten Vielfachheit und entwickeln die Laurentreihe von $\sum_{n=0}^{\infty} p(n,6)\, q^n$ um den Punkt 1, was uns ein Polynom vom Grad 5 liefert. Die Entwicklung der Laurentreihe von $\sum_{n=0}^{\infty} p(n,6)\, q^n$ um den Punkt 1 gibt uns

$$\frac{1}{720(1-q)^6} + \frac{1}{96(1-q)^5} + \frac{17}{432(1-q)^4} + \frac{85}{864(1-q)^3} + \frac{31037}{172800(1-q)^2} + \frac{85823}{345600(1-q)}$$
$$= \frac{\frac{85823}{345600}(1-q)^5 + \frac{31037}{172800}(1-q)^4 + \frac{85}{864}(1-q)^3 + \frac{17}{432}(1-q)^2 + \frac{1}{96}(1-q) + \frac{1}{720}}{(1-q)^5}.$$

Unter Anwendung der Binomialreihe entspricht dies

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+5}{5} q^n \left(-\frac{85823}{345600}q^5 + \frac{491189}{345600}q^4 - \frac{570263}{172800}q^3 + \frac{24931}{6400}q^2 - \frac{810211}{345600}q + \frac{199577}{345600} \right)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+5}{5} \left(-\frac{85823}{345600}\right) q^{n+5} + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+5}{5} \frac{491189}{345600} q^{n+4}$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+5}{5} \left(-\frac{570263}{172800}\right) q^{n+3} + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+5}{5} \frac{24931}{6400} q^{n+2}$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+5}{5} \left(-\frac{810211}{345600}\right) q^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+5}{5} \frac{199577}{345600} q^{n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{5} \left(-\frac{85823}{345600}\right) q^n + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{5} \frac{491189}{345600} q^n + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{5} \left(-\frac{570263}{172800}\right) q^n$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+3}{5} \frac{24931}{6400} q^n + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+4}{5} \left(-\frac{810211}{345600}\right) q^n + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+5}{5} \frac{199577}{345600} q^n.$$

Wir betrachten nun die Koeffizienten der Erzeugendenfunktionen und erhalten die Annäherung

$$p(n,6) \approx \frac{1}{86400} n^5 + \frac{7}{11520} n^4 + \frac{77}{6480} n^3 + \frac{245}{2304} n^2 + \frac{43981}{103680} n + \frac{199577}{345600}.$$

Diese Annäherung weicht von $p(n,6)$ in den letzten drei Termen ab, da die anderen Pole Polynome vom Grad maximal 2 liefern. Um zu überprüfen wie gut unsere Annäherung tatsächlich ist, betrachten wir nun einige Beispiele.

Über die Taylorentwicklung um den Punkt 0 von

$$\prod_{n=1}^{6} \frac{1}{1-q^n}$$

aus Lemma 2.4 erhalten wir, durch die Koeffizienten von q^6, q^7, q^8 und q^{100}, die exakten Ergebnisse

$$1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + 7q^5 + 11q^6 + 14q^7 + 20q^8 + 26q^9 + \cdots + 189509q^{100} + \cdots.$$

Beispiel 4.5. Wir betrachten $n = 6, 7, 8$ und 100.

$$p(6,6) \approx \frac{1}{86400} 6^5 + \frac{7}{11520} 6^4 + \frac{77}{6480} 6^3 + \frac{245}{2304} 6^2 + \frac{43981}{103680} 6 + \frac{199577}{345600} = \frac{3592501}{345600}$$
$$\approx 10{,}395,$$

wobei $p(6,6) = 11$ ist.

$$p(7,6) \approx \frac{1}{86400} 7^5 + \frac{7}{11520} 7^4 + \frac{77}{6480} 7^3 + \frac{245}{2304} 7^2 + \frac{43981}{103680} 7 + \frac{199577}{345600} = \frac{200263}{13824}$$
$$\approx 14{,}487,$$

wobei $p(7,6) = 14$ ist.

$$p(8,6) \approx \frac{1}{86400} 8^5 + \frac{7}{11520} 8^4 + \frac{77}{6480} 8^3 + \frac{245}{2304} 8^2 + \frac{43981}{103680} 8 + \frac{199577}{345600} = \frac{6818249}{345600}$$
$$\approx 19{,}729,$$

wobei $p\,(8,6) = 20$ ist.

$$\begin{aligned} p\,(100,6) \approx & \frac{1}{86400}100^5 + \frac{7}{11520}100^4 + \frac{77}{6480}100^3 + \frac{245}{2304}100^2 + \frac{43981}{103680}100 \\ & + \frac{199577}{345600} = \frac{65489026577}{345600} \approx 189493,711, \end{aligned}$$

wobei $p\,(100,6) = 189509$ ist.

Durch das Beispiel wird deutlich, dass wir auch hier eine gute Annäherung mit relativ geringem Aufwand für $p\,(n,6)$ erzielt haben. Es ist dennoch zu erkennen, dass wir für größere n ungenauere Ergebnisse erzielen als für kleinere. Im Vergleich zu $p\,(n,5)$ ist diese Approximation ungenauer. Das liegt daran, dass für $m = 6$ die Pole, welche wir vernachlässigten, zum Teil größere Vielfachheiten, und somit Polynome von höherem Grad, haben, als bei $m = 5$. Um eine bessere Approximation zu bestimmen, könnte man einen weiteren Pol, möglichst mit großer Vielfachheit, in Betracht ziehen.
Über diese Methode wäre es uns möglich $p\,(n,m)$ für weitere $m \geq 7$ zu bestimmen. Die Berechnung wird an dieser Stelle dem Leser überlassen.

Literatur

[1] George E. Andrews, *The theory of partitions*, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 1998, Reprint of the 1976 original. MR 1634067

[2] George E. Andrews and Kimmo Eriksson, *Integer partitions*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004. MR 2122332

[3] Angelica Castillo, Stephanie Flores, Anabel Hernandez, Brandt Kronholm, Acadia Larsen, and Arturo Martinez, *Quasipolynomials and maximal coefficients of Gaussian polynomials*, Ann. Comb. **23** (2019), no. 3-4, 589–611. MR 4039553

[4] William Dunham, *Euler: the master of us all*, The Dolciani Mathematical Expositions, vol. 22, Mathematical Association of America, Washington, DC, 1999. MR 1669154

[5] Leonhard Euler, *Introductio in Analysin Infinitorum. (Opera Omnia. Series Prima: Opera Mathematica, Volumen Novum.)*, Societas Scientiarum Naturalium Helveticae, Geneva, 1945, Editit Andreas Speiser. MR 0016336

[6] Richard P. Stanley, *Enumerative combinatorics. Volume 1*, second ed., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 49, Cambridge University Press, Cambridge, 2012. MR 2868112

[7] Herbert S. Wilf, *generatingfunctionology*, third ed., A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 2006. MR 2172781